MITROIU MARIA ROXANA

VARIETĂȚI DIFERENȚIABILE

ISBN
978-973-0-39977-6

TÂRGU JIU, 2024

MITROIU MARIA ROXANA

VARIETĂŢI DIFERENŢIABILE

Târgu Jiu
2024
ISBN
978-973-0-39977-6

CUPRINS

Capitolul I. Varietăţi diferenţiabile
1. Definiţia varietăţii diferenţiabile

1.1. Definiţie. Fie M o mulţime nevidă. Prin C^k-atlas de tip $\mathbb{R}^n$ pe M înţelegem o familie $\mathcal{A} = \{(U_a, h_a) / a \in A\}$, unde A este o mulţime arbitrară de indici, $U_a \subset M$, $(\forall)\, a \in A$, iar $h_a : U_a \to \mathbb{R}^n$ este aplicaţie injectivă, $(\forall)\, a \in A$, astfel încât:

(A_1) $\bigcup\limits_{a\in A} U_a = M$,

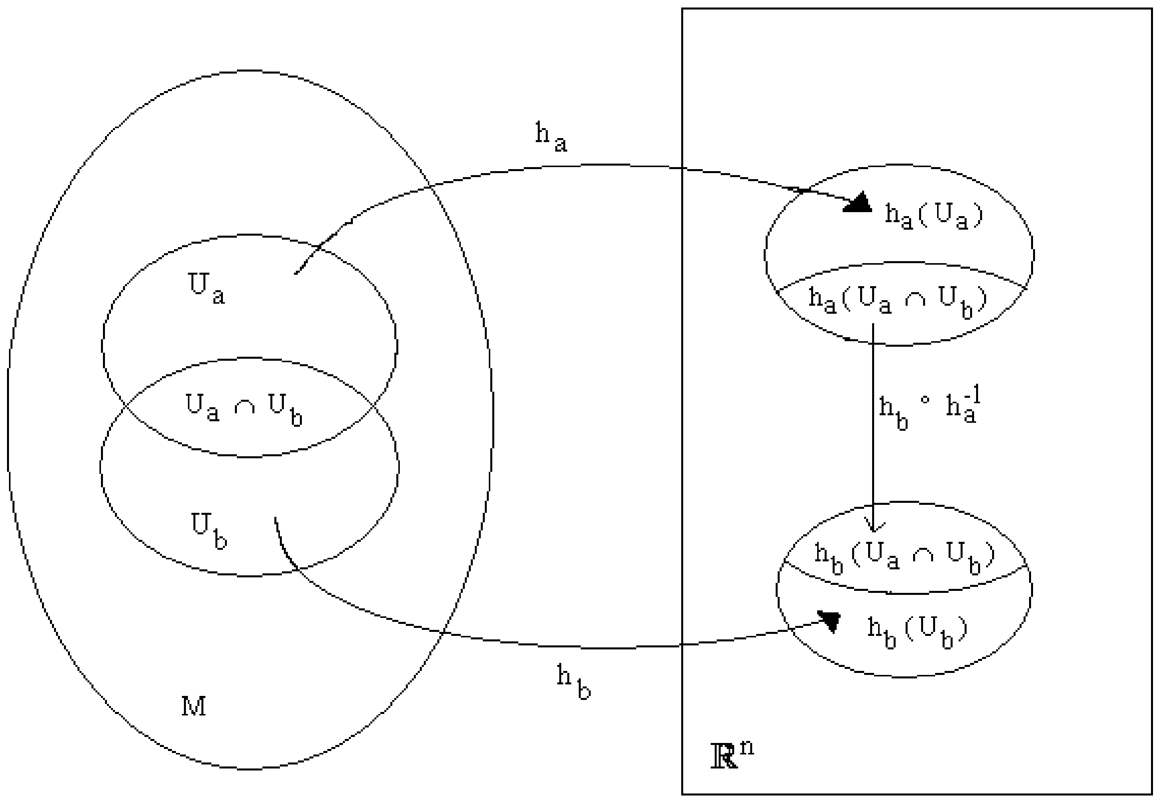
(A_2) $h_a(U_a \cap U_b)$ este mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$, $(\forall)\, a, b \in A$,

(A_3) pentru orice $a, b \in A$ cu $U_a \cap U_b \neq \emptyset$, aplicaţia $h_b \circ h_a^{-1} : h_a(U_a \cap U_b) \to \mathbb{R}^n$ este diferenţiabilă de clasă C^k.

1.2. Observaţie. i) Elementele lui $\mathcal{A}$ se numesc hărţi (de dimensiune n pe M).

ii) Aplicaţia $h_b \circ h_a^{-1}$ se numeşte aplicaţie de identificare pentru U_a şi U_b (sau schimbare de hartă).

iii) O reprezentare intuitivă a definiţiei C^k-atlasului de tip $\mathbb{R}^n$ pe M este dată de figura de mai jos:



1.3. Propoziţie. Fie $\mathcal{A} = \{(U_a, h_a) / a \in A\}$, un C^k-atlas de tip $\mathbb{R}^n$ pe M. Atunci:

i) $h_a(U_a)$ este mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$, $(\forall)\ a \in A$,

ii) aplicaţia $h_b \circ h_a^{-1} : h_a(U_a \cap U_b) \to h_b(h_a \cap U_b)$ este difeomorfism de clasă C^k, $(\forall)$ a, b $\in$ A.

Demonstraţie. i) Din definiţia 1.1 ştim că $h_a(U_a \cap U_b)$ este mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$, $(\forall)$ a, b $\in$ A . În particular, pentru a = b obţinem că $h_a(U_a)$ este mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$.

ii) Este evident că $h_b(U_a \cap U_b)$ este mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$ şi că aplicaţia $h_a \circ h_b^{-1} : h_b(U_a \cap U_b) \to h_a(U_a \cap U_b)$ este diferenţiabilă de clasă C^k. Compunând funcţiile $h_b \circ h_a^{-1}$ şi $h_a \circ h_b^{-1}$ obţinem transformarea identică, deci aplicaţiile $h_b \circ h_a^{-1}$ şi $h_a \circ h_b^{-1}$ sunt inverse una alteia. Cum ambele aplicaţii sunt diferenţiabile de clasă C^k, rezultă că $h_b \circ h_a^{-1}$ este difeomorfism de clasă C^k.

Q.E.D.

1.4. Propoziţie. Fie $\mathcal{A} = \{(U_a, h_a) / a \in A\}$, un C^k-atlas de tip $\mathbb{R}^n$ pe M. Există $\mathcal{T}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{P}(M)$ (cu $\mathcal{P}(M)$ am notat familia părţilor lui M) cu următoarele proprietăţi:

i) $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ este topologie pe M,

ii) $U_a \subset \mathcal{T}(\mathcal{A})$, $(\forall)\ a \in A$,

iii) aplicaţia $h_a : (U_a, \mathcal{T}(\mathcal{A})\big|_{U_a}) \to h_a(U_a, \mathcal{T})$ este un homeomorfism (cu $\mathcal{T}$ am notat topologia spaţiului $\mathbb{R}^n$),

iv) $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ este unică cu proprietăţile i), ii) şi iii).

Demonstraţie. Luăm prin definiţie

$\mathcal{T}(\mathcal{A}) = \{ V \in \mathcal{P}(M) / h_a(V \cap U_a) \in \mathcal{T},\ (\forall)\ a \in A \}$

i) Arătăm că $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ este topologie pe M: Fie $(V_i)_{i \in I}$ o familie de elemente din $\mathcal{T}(\mathcal{A})$, deci $h_a(V_i \cap U_a) \in \mathcal{T}$, $(\forall)\ a \in A$, $(\forall)\ i \in I$.

Deoarece avem

$$h_a((\bigcup_{i \in I} V_i) \cap U_a) = h_a(\bigcup_{i \in I}(V_i \cap U_a)) = \bigcup_{i \in I} h_a(V_i \cap U_a) \in \mathcal{T},$$

rezultă că $\bigcup_{i \in I} V_i \in \mathcal{T}(\mathcal{A})$.

Fie $V_1, V_2 \in \mathcal{T}(\mathcal{A})$, deci $h_a(V_1 \cap U_a)$ şi $h_a(V_2 \cap U_a) \in \mathcal{T}$, $(\forall)\ a \in A$. Deoarece h_a este injectivă, avem:

$$h_a((V_1 \cap V_2) \cap U_a) = h_a(V_1 \cap U_a) \cap h_a(V_2 \cap U_a) \in \mathcal{T}.$$

Rezultă că $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{T}(\mathcal{A})$.

Din $h_a(\varnothing \cap U_a) = h_a(\varnothing) = \varnothing \in \mathcal{T}$, $(\forall)\, a \in A$, rezultă că $\varnothing \in \mathcal{T}(\mathcal{A})$.

Din $h_a(M \cap U_a) = h_a(U_a) \in \mathcal{T}$, $(\forall)\, a \in A$, rezultă că $M \in \mathcal{T}(\mathcal{A})$.

Prin urmare, $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ este topologie pe M.

ii) Deoarece $h_a(U_a \cap U_b) \in \mathcal{T}$, $(\forall)\, a, b \in A$, rezultă că $U_b \in \mathcal{T}(\mathcal{A})$, $(\forall)\, b \in A$.

iii) Este evident că aplicaţia $h_a : U_a \to h_a(U_a)$ este bijectivă. Rămâne să arătăm că $h_a : (U_a, \mathcal{T}(\mathcal{A})\big|_{U_a}) \to h_a(U_a, \mathcal{T})$ este aplicaţie continuă şi deschisă, $(\forall)\, a \in A$.

Fie U o mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$ şi $b \in A$. Pentru orice $a \in A$ avem că $h_a(h_b^{-1}(U) \cap U_a) = h_a \circ h_b^{-1}(U) \cap h_a(U_a)$ = mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$ (am folosit faptul că $h_a \circ h_b^{-1}$ este difeomorfism, deci $h_a \circ h_b^{-1}$ este aplicaţie deschisă, prin urmare $h_a \circ h_b^{-1}$ (U) este mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$). Deoarece $h_a(h_b^{-1}(U) \cap U_a)$ este mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$, rezultă că $h_b^{-1}(U) \in \mathcal{T}(\mathcal{A})$, deci h_b este aplicaţie continuă.

Să arătăm că h_a este aplicaţie deschisă, $(\forall)\, a \in A$. Fie $a \in A$. Pentru orice $W \in \mathcal{T}(\mathcal{A})$ cu $W \subset U_a$ avem $h_a(W) = h_a(W \cap U_a)$ = mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$, deci h_a este aplicaţie deschisă. În concluzie, h_a este homeomorfism, $(\forall)\, a \in A$.

iv) Fie $\mathcal{T}'$ o topologie pe M cu proprietăţile i), ii), iii). Vom arăta (prin dublă incluziune) că $\mathcal{T}' = \mathcal{T}(\mathcal{A})$.

Fie $U' \in \mathcal{T}'$. Atunci $U' \cap U_a \in \mathcal{T}'$, $(\forall)\, a \in A$. Rezultă că $h_a(U' \cap U_a)$ este mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$, $(\forall)\, a \in A$, adică $U' \in \mathcal{T}(\mathcal{A})$.

Am obţinut $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}(\mathcal{A})$.

Fie $U \in \mathcal{T}(\mathcal{A})$. Atunci $U_a\ (U \cap U_a)$ este mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$.

Deoarece aplicaţia $h_a : (U_a, \mathcal{T}'\big|_{U_a}) \to h_a(U_a, \mathcal{T})$ este un homeomorfism, rezultă că $h_a^{-1}(h_a(U \cap U_a)) = U \cap U_a \in \mathcal{T}'$, $(\forall)\, a \in A$.

Deci avem $U = U \cap (\bigcup\limits_{a \in A} U_a) = \bigcup\limits_{a \in A} (U \cap U_a) \in \mathcal{T}'$.

Am obţinut $\mathcal{T}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{T}'$.

În concluzie, avem $\mathcal{T}' = \mathcal{T}(\mathcal{A})$.

Q.E.D.

1.5. Teoremă. Fie M o mulţime nevidă. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) există un C^k-atlas de tip $\mathbb{R}^n$ pe M ,

(ii) M este un spaţiu topologic verificând următoarele condiţii:

(ii_1) există o familie $\{U_a \,/\, a \in A\}$ de deschişi din M astfel încât $\bigcup\limits_{a \in A} U_a = M$,

(ii_2) pentru orice $a \in A$ există un homeomorfism $h_a : U_a \to h_a(U_a) \subset \mathbb{R}^n$,

(ii_3) pentru orice $a, b \in A$ cu $U_a \cap U_b \neq \varnothing$, aplicaţia

$h_b \circ h_a^{-1} : h_a(U_a \cap U_b) \to \mathbb{R}^n$ este diferenţiabilă de clasă C^k.

Demonstraţie. (i) $\Rightarrow$ (ii) Evident (a se vedea propoziţia precedentă).

(ii) $\Rightarrow$ (i) Din (ii_1) avem $U_a \subset M$, $(\forall)$ $a \in A$, iar din (ii_2) obţinem că h_a este injectivă şi că $h_a(U_a \cap U_b)$ este mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$. Folosind (ii_3), obţinem că $\mathcal{A} = \{(U_a, h_a) / a \in A\}$ este un C^k-atlas de tip $\mathbb{R}^n$ pe M.

Q.E.D.

1.6. Definiţie. Fie $\mathcal{A} = \{(U_a, h_a) / a \in A\}$, un C^k-atlas de tip $\mathbb{R}^n$ pe M. $\mathcal{A}$ se numeşte C^k-atlas maximal dacă este îndeplinită condiţia (de maximalitate):

"Dacă (U, h) este o pereche formată dintr-o mulţime $U \subset M$ şi o aplicaţie injectivă $h : U \to \mathbb{R}^n$ astfel încât $\mathcal{A} \cup \{(U, h)\}$ să verifice condiţiile (A_1), (A_2) şi (A_3) din definiţia atlasului, atunci $(U, h) \in \mathcal{A}$" (altfel spus, familia $\mathcal{A}$ nu poate fi lărgită).

1.7. Propoziţie. Orice C^k-atlas $\mathcal{A} = \{(U_a, h_a)\}$ de tip $\mathbb{R}^n$ pe mulţimea M poate fi completat în mod unic la un C^k-atlas maximal $\mathcal{A}'$.

1.8. Observaţie. 1.8.1. Orice C^k-atlas maximal pe M este C^k-atlas pe M.

1.8.2. Nu orice C^k-atlas pe M este C^k-atlas maximal pe M.

1.8.3. Un C^k-atlas maximal de tip $\mathbb{R}^n$ pe mulţimea M se mai numeşte structură diferenţiabilă de clasă C^k pe M.

1.9. Definiţie. O mulţime M se numeşte varietate diferenţiabilă de clasă C^k şi de dimensiune n dacă:

1) este dotată cu o structură diferenţiabilă (există un C^k-atlas maximal pe M $\Rightarrow$ există un atlas pe M),

2) există un C^k-atlas pe M de tip $\mathbb{R}^n$ format dintr-o mulţime numărabilă de hărţi,

3) topologia indusă de structura diferenţiabilă este Hausdorff (separabilă).

1.10. Observaţie. i) Pentru $k = 0$ se obţine definiţia varietăţii topologice.

ii) Pentru $k = \infty$ se obţine definiţia varietăţii de clasă C^∞.

iii) Pentru $k = \omega$ se obţine definiţia varietăţii analitice sau de clasă C^ω.

2. Exemple de varietăţi diferenţiabile

Exemplul 1. Pe mulţimea $\mathbb{R}^n$ se poate defini o structură de varietate analitică reală cu ajutorul unui atlas de tip $\mathbb{R}^n$ format dintr-o singură hartă ($\mathbb{R}^n$, $Id_{\mathbf{R}^n}$). Verificarea condiţiilor (A_1), (A_2) şi (A_3) din definiţia 1.1 este trivială. Deci, $\mathbb{R}^n$ este varietate analitică reală de dimensiune n.

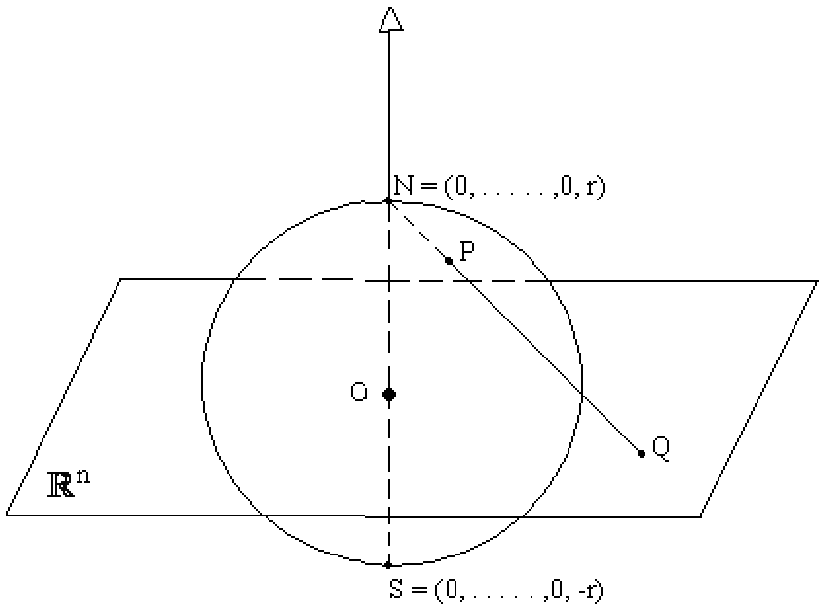
Exemplul 2. Fie sfera

$S^n = \{(u^1, \ldots\ldots, u^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \,/\, ((u^1)^2 + \ldots\ldots + (u^{n+1})^2) = r^2,\ r > 0\}$.

Pe S^n se poate defini o structură de varietate analitică reală cu ajutorul uni atlas $\mathcal{A} = \{(U_N, h_N), (U_S, h_S)\}$, construit după cum urmează.

Fie $N = (0, \ldots\ldots, 0, r)$ polul nord al sferei S^n. Notăm $U_N = S^n - \{N\}$ şi $U_S = S^n - \{S\}$. Mai considerăm hiperplanul ecuatorial al sferei S^n dat de ecuaţia $u^{n+1} = 0$, pe care îl identificăm cu $\mathbb{R}^n$.

Pentru un punct arbitrar $P \in U_N$, dreapta NP intersectează hiperplanul ecuatorial într-un punct Q. Considerăm următorul desen reprezentativ:



Dreapta determinată de punctele $N = (0, \ldots\ldots, 0, r)$ şi $P = (u^1, \ldots\ldots, u^{n+1})$ are ecuaţiile

$$NP : \frac{X^1}{u^1} = \ldots\ldots = \frac{X^n}{u^n} = \frac{X^{n+1} - r}{u^{n+1} - r}.$$

Intersectând dreapta NP cu hiperplanul ecuatorial definit prin $X^{n+1} = 0$, obţinem coordonatele punctului Q:

$$X^1 = \frac{ru^1}{r - u^{n+1}}, \ldots\ldots, X^n = \frac{ru^n}{r - u^{n+1}}.$$

În definitiv, am definit aplicaţia: $h_N : U_N = S^n - \{N\} \to \mathbb{R}^n$, (numită proiecţia stereografică din polul nord) prin:

$$h_N(u^1, \ldots, u^{n+1}) = \left(\frac{ru^1}{r - u^{n+1}}, \ldots\ldots, \frac{ru^n}{r - u^{n+1}}\right).$$

Arătăm ca aplicaţia h_N este injectivă:

Din $h_N(u^1, \ldots, u^{n+1}) = h_N(u'^1, \ldots, u'^{n+1})$ rezultă

$$(*)\ \frac{ru^1}{r - u^{n+1}} = \frac{ru'^1}{r - u'^{n+1}}, \ldots, \frac{ru^n}{r - u^{n+1}} = \frac{ru'^n}{r - u'^{n+1}} \text{ sau}$$

$$u^1 = \frac{r - u^{n+1}}{r - u'^{n+1}} u'^1, \ldots, u^n = \frac{r - u^{n+1}}{r - u'^{n+1}} u'^n.$$ De aici rezultă:

$$(u^1)^2 + \ldots + (u^{n+1})^2 = \frac{(r - u^{n+1})^2}{(r - u'^{n+1})^2}\left((u'^1)^2 + \ldots + (u'^n)^2\right).$$

Deoarece $\sum_{i=1}^{n+1}(u^i)^2 = r^2$ şi $\sum_{i=1}^{n+1}(u'^i)^2 = r^2$, obţinem

$$r + u^{n+1} = \frac{r - u^{n+1}}{r - u'^{n+1}}(r + u'^{n+1}).$$

Din ultima egalitate, rezultă că $u'^{n+1} = u^{n+1}$ şi ţinând seama de egalităţile (*) obţinem $u'^1 = u^1, \ldots, u'^n = u^n$. Prin urmare, h_N este aplicaţie injectivă. Avem $h_N(U_N) = \mathbb{R}^n$. Inversa aplicaţiei h_N este dată prin:

$$h_N^{-1}(x^1, \ldots, x^n) = \left(\frac{2r^2x^1}{\sum_{k=1}^{n}(x^k)^2 + r^2}, \ldots, \frac{2r^2x^n}{\sum_{k=1}^{n}(x^k)^2 + r^2}, \frac{r\left(\sum_{s=1}^{n}(x^s)^2 - r^2\right)}{\sum_{k=1}^{n}(x^k)^2 + r^2} \right).$$

Analog, prin proiecţia stereografică din polul sud, obţinem perechea (U_S, h_S), unde $S = (0, \ldots, -r)$ este polul sud al sferei S^n, $U_S = S^n - \{S\}$,

iar $h_S(y^1, \ldots, y^{n+1}) = \left(\frac{ry^1}{r + y^{n+1}}, \ldots, \frac{ry^n}{r + y^{n+1}}\right)$. Aplicaţia h_S este injectivă.

Avem $h_S(U_S) = \mathbb{R}^n$. Inversa aplicaţiei h_S este dată prin:

$$h_S^{-1}(y^1, \ldots, y^n) = \left(\frac{2r^2y^1}{\sum_{k=1}^{n}(y^k)^2 + r^2}, \ldots, \frac{2r^2y^n}{\sum_{k=1}^{n}(y^k)^2 + r^2}, \frac{r\left(\sum_{s=1}^{n} r^2 - (y^s)^2\right)}{\sum_{k=1}^{n}(y^k)^2 + r^2} \right).$$

Aplicaţiile $h_S \circ h_N^{-1} : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}^n$, $h_N \circ h_S^{-1} : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}^n$ sunt date prin formulele:

$$h_S \circ h_N^{-1}(x^1, \ldots, x^n) = \left(r^2 \frac{x^1}{\sum_{k=1}^{n} (x^k)^2}, \ldots, r^2 \frac{x^n}{\sum_{k=1}^{n} (x^k)^2} \right),$$

$$h_N \circ h_S^{-1}(y^1, \ldots, y^n) = \left(r^2 \frac{y^1}{\sum_{k=1}^{n} (y^k)^2}, \ldots, r^2 \frac{y^n}{\sum_{k=1}^{n} (y^k)^2} \right).$$

Familia $\mathcal{A} = \{ (U_N, h_N), U_S, h_S)\}$ formează un atlas de tip $\mathbb{R}^n$ pe S^n deoarece:

i) $U_N \cup U_S = S^n$,

ii) $h_N(U_N) = \mathbb{R}^n$, $h_N(U_N \cap U_S) = \mathbb{R}^n - \{0\}$,

$h_S(U_S) = \mathbb{R}^n$, $h_S(U_S \cap U_N) = \mathbb{R}^n - \{0\}$

sunt mulţimi deschise în $\mathbb{R}^n$.

iii) aplicaţiile $h_N \circ h_S^{-1}$ şi $h_S \circ h_N^{-1}$ sunt analitice.

Să arătăm că topologia de varietate $\mathcal{T}$ a sferei S^n este separată.

Fie p, q $\in S^n$, $p \neq q$.

Presupunem că p, q $\in U_N$. Notăm $h_N(p) = x \in \mathbb{R}^n$, $h_N(q) = y \in \mathbb{R}^n$. Deoarece $\mathbb{R}^n$ este separat, rezultă că există vecinătăţile deschise U_x, U_y, $x \in U_x$, $y \in U_y$, astfel încât $U_x \cap U_y = \emptyset$. Atunci $h_N^{-1}(U_x)$, $h_N^{-1}(U_y)$ sunt mulţimi deschise în S^n, deci $h_N^{-1}(U_x)$ şi $h_N^{-1}(U_y) \in \mathcal{T}_{U_N}$. În plus, avem $p \in h_N^{-1}(U_x)$ şi $q \in h_N^{-1}(U_y)$. Rezultă:

$$h_N^{-1}(U_x) \cap h_N^{-1}(U_y) = h_N^{-1}(U_x \cap U_y) = h_N^{-1}(\emptyset)$$

şi deci punctele p şi q se separă.

Analog procedăm în cazul în care p, q $\in U_S$.

Singura situaţie care rămâne de discutat este aceea în care p = N şi q = S. Fie S^n_+ şi S^n_- emisfera nordică şi respectiv emisfera sudică, deci:

$$S^n_+ = \{(u^1, \ldots, u^{n+1}) \in S^n \ / \ u^{n+1} > 0\},$$

$$S^n_- = \{(u^1, \ldots, u^{n+1}) \in S^n \ / \ u^{n+1} < 0\}.$$

Este evident că $N \in S^n_+$, $S \in S^n_-$ şi $S^n_+ \cap S^n_- = \emptyset$.

Să arătăm că S^n_+ şi S^n_- sunt mulţimi deschise. Vom folosi faptul că h_N şi h_S sunt homeomorfisme. Să arătăm mai întâi că $h_S(S^n_+)$ este mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$.

Pentru $u^1, \ldots\ldots, u^{n+1} \in S^n_+$ avem:

$$h_S(u^1, \ldots\ldots, u^{n+1}) = (y^1, \ldots, y^n), \text{ unde } y^i = \frac{r u^i}{r + u^{n+1}}, \ i = 1, \ldots, n.$$

Rezultă:

$$\sum_{i=1}^{n}(y^i)^2 = \frac{r^2\sum_{i=1}^{n}(u^i)^2}{(r+u^{n+1})^2} = \frac{r^2(r^2-(u^{n+1})^2)}{(r+u^{n+1})^2} = \frac{r^2(r-(u^{n+1}))}{r+u^{n+1}}$$

şi deoarece $u^{n+1} > 0$, obţinem $\frac{r-u^{n+1}}{r+u^{n+1}} < 1$. Deci, $\sum_{i=1}^{n}(y^i)^2 < r^2$, ceea ce ne arată că $h_S(S^n_+) \subset D$, unde

$D = \{ (y^1, \ldots, y^n), / (y^1)^2 + \ldots\ldots + (y^n)^2 < r^2 \}$ este mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$. Dacă $y \in D$, atunci se arată uşor că $h_S^{-1}(y) \in S^n_+$.

Rezultă că $y \in h_S(S^n_+)$, deci $D \subset h_S(S^n_+)$ este mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$. Cum h_S este homeomorfism, rezultă că S^n_+ este mulţime deschisă în S^n. Analog, se arată că S^n_- este mulţime deschisă în S^n şi deci topologia de varietate a sferei S^n este separată.

Exemplul 3. Spaţiul proiectiv real de dimensiune n este o varietate diferenţiabilă (separată) cu n dimensiuni.

Notăm cu $P_n(\mathbf{R})$ spaţiul proiectiv real de dimensiune n. $P_n(\mathbf{R})$ este mulţimea dreptelor din $\mathbb{R}^{n+1}$ ce trec prin origine. O dreaptă d din $\mathbb{R}^{n+1}$ ce trece prin origine este determinată de parametrii ei directori $(a^1, \ldots, a^{n+1})$, unde $(a^1)^2 + \ldots + (a^{n+1})^2 > 0$. Aceşti parametri directori sunt daţi până la un factor nenul de proporţionalitate, deoarece $(\lambda a^1, \ldots, \lambda a^{n+1})$,
unde $\lambda \neq 0$, reprezintă aceeaşi dreaptă d trecând prin origine.

Prin urmare, spaţiul proiectiv $P_n(\mathbf{R})$ poate fi obţinut ca un spaţiu cât din $\mathbb{R}^{n+1} - \{ 0 \}$ prin relaţia de echivalenţă $\sqcup$ dată de:

$(x^1, \ldots, x^{n+1}) \sqcup (y^1, \ldots, y^{n+1}) \Leftrightarrow$ există $\lambda \in \mathbf{R} - \{ 0 \}$ astfel încât $x^i = \lambda y^i$, $i = 1, \ldots, n+1$. Deci,

$$P_n(\mathbf{R}) = \mathbb{R}^{n+1} - \{ 0 \} / (x^1, \ldots, x^{n+1}) \sqcup (\lambda x^1, \ldots, \lambda x^{n+1}),\ \lambda \neq 0.$$

Vom nota prin $[x^1, \ldots, x^{n+1}]$ clasa de echivalenţă a lui $x = (x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} - \{ 0 \}$. Notăm

$$U_i = \{ [x^1, \ldots, x^{n+1}] \in P_n(\mathbf{R}) \ / \ x^i \neq 0 \} \subset P_n(\mathbf{R}),\ i \in \{ 1, \ldots, n+1 \}.$$

Pentru $i \in \{1, ..., n+1\}$ definim aplicaţia $h_i : U_i \to \mathbb{R}^n$, prin

$h_i([x^1, ..., x^{n+1}]) = (y^1, ..., y^n) \in \mathbb{R}^n$, unde:

$$y^1 = \frac{x^1}{x^i}, ..., y^{i-1} = \frac{x^{i-1}}{x^i}, y^i = \frac{x^{i+1}}{x^i}, ..., y^n = \frac{x^{n+1}}{x^i}.$$

Din $h_i([x^1, ..., x^{n+1}]) = h_i([z^1, ..., z^{n+1}])$, rezultă

$$\left(\frac{x^1}{x^i}, ..., \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, ..., \frac{x^{n+1}}{x^i}\right) = \left(\frac{z^1}{z^i}, ..., \frac{z^{i-1}}{z^i}, \frac{z^{i+1}}{z^i}, ..., \frac{z^{n+1}}{z^i}\right).$$

Din ultima egalitate avem:

$$\frac{x^1}{x^i} = \frac{z^1}{z^i}, ..., \frac{x^{i-1}}{x^i} = \frac{z^{i-1}}{z^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i} = \frac{z^{i+1}}{z^i}, ..., \frac{x^{n+1}}{x^i} = \frac{z^{n+1}}{z^i} \text{ sau}$$

$$x^1 = \frac{x^i}{z^i} z^1, ..., x^{i-1} = \frac{x^i}{z^i} z^{i-1}, x^i = \frac{x^i}{z^i} z^i,$$

$$x^{i+1} = \frac{x^i}{z^i} z^{i+1}, ..., x^{n+1} = \frac{x^i}{z^i} z^{n+1},$$

adică $[x^1, ..., x^{n+1}] = [z^1, ..., z^{n+1}]$. Deci, h_i este aplicaţie injectivă.

Să verificăm condiţiile din definiţia varietăţii.

Din $U_i \subset P_n(\mathbf{R})$, rezultă $\bigcup_{i=1}^{n+1} U_i \subset P_n(\mathbf{R})$. Deoarece avem şi

$P_n(\mathbf{R}) \subset \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i$, rezultă $P_n(\mathbf{R}) = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i$.

Fie $i, j \in \{1, ..., n+1\}$ astfel încât $U_i \cap U_j \neq \varnothing$. Avem:

$U_i \cap U_j = \{[x^1, ..., x^{n+1}] \in P_n(\mathbf{R}) / \ x^i \neq 0, \ x^j \neq 0\}$

Să arătăm că $h_i(U_i \cap U_j)$ este mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$.

<u>Cazul $j < i$</u>. Fie $[x^1, ..., x^{n+1}] \in U_i \cap U_j$. Avem:

$$h_i([x^1, ..., x^{n+1}]) = \left(\frac{x^1}{x^i}, ..., \frac{x^j}{x^i}, ..., \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, ..., \frac{x^{n+1}}{x^i}\right) \in \mathbb{R}^n,$$

deci $h_i(U_i \cap U_j) = \{(y^1, ..., y^n) \in \mathbb{R}^n \ / \ y^j \neq 0\}$

$$= \mathbb{R}^n - \{(y^1, ..., y^n) \in \mathbb{R}^n \ / \ y^j = 0\}$$

şi este clar că $h_i(U_i \cap U_j)$ este mulţime deschisă în $\square^n$.

Cazul $j > i$. Fie $[x^1, \ldots, x^{n+1}] \in U_i \cap U_j$. Avem:

$$h_i([x^1, \ldots, x^{n+1}]) = \left(\frac{x^1}{x^i}, \ldots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \ldots, \frac{x^j}{x^i}, \ldots, \frac{x^{n+1}}{x^i}\right) \in \mathbb{R}^n,$$

deci $h_i(U_i \cap U_j) = \{(y^1, \ldots, y^n) \in \mathbb{R}^n \,/\, y^{j-1} \neq 0\}$

$$= \mathbb{R}^n - \{(y^1, \ldots, y^n) \in \mathbb{R}^n \,/\, y^{j-1} = 0\}$$

şi este evident că $h_i(U_i \cap U_j)$ este mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$.

Să verificăm acum că aplicaţia

$h_j \circ h_i^{-1} : h_i(U_i \cap U_j) \to h_j(U_i \cap U_j)$ este diferenţiabilă.

Mai întâi observăm că $h_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ este bijecţie, $(\forall)\, i \in \{1, \ldots, n+1\}$. Să scriem inversa aplicaţiei h_i. Din ecuaţiile aplicaţiei h_i:

$y^1 = \dfrac{x^1}{x^i}, \ldots, y^{i-1} = \dfrac{x^{i-1}}{x^i}, y^i = \dfrac{x^{i+1}}{x^i}, \ldots, y^n = \dfrac{x^{n+1}}{x^i}$, obţinem:

$x^1 = y^1 x^i, \ldots, x^{i-1} = y^{i-1} x^i, x^{i+1} = y^i x^i, \ldots, x^{n+1} = y^n x^i$ şi adăugând relaţia $x^i = x^i$, obţinem ecuaţiile aplicaţiei h_i^{-1}:

$h_i^{-1} : x^1 = y^1, \ldots, x^{i-1} = y^{i-1}, x^{i+1} = y^i, \ldots, x^{n+1} = y^n$.

Fie $(y^1, \ldots, y^n) \in h_i(U_i \cap U_j)$. Avem:

$$h_j \circ h_i^{-1}(y^1, \ldots, y^n) = h_j(h_i^{-1}(y^1, \ldots, y^n))$$
$$= h_j([y^1, \ldots, y^{i-1}, 1, y^i, \ldots, y^n]).$$

Dacă $j < i$, avem:

$$h_j([y^1, \ldots, y^j, \ldots, y^{i-1}, 1, y^i, \ldots, y^n]) =$$
$$= h_j\left(\left[\frac{y^1}{y^j}, \ldots, \frac{y^{j-1}}{y^j}, 1, \frac{y^{j+1}}{y^j}, \ldots, \frac{y^{i-1}}{y^j}, \frac{1}{y^j}, \frac{y^i}{y^j}, \ldots, \frac{y^n}{y^j}\right]\right) =$$
$$= \left(\frac{y^1}{y^j}, \ldots, \frac{y^{j-1}}{y^j}, \frac{y^{j+1}}{y^j}, \ldots, \frac{y^{i-1}}{y^j}, \frac{1}{y^j}, \frac{y^i}{y^j}, \ldots, \frac{y^n}{y^j}\right)$$

şi cum componentele sunt diferenţiabile (pentru $y^j \neq 0$), rezultă că aplicaţia $h_j \circ h_i^{-1}$ este diferenţiabilă.

Dacă $j = i$, compunând h_i cu h_i^{-1} obţinem aplicaţia identică care este diferenţiabilă.

Dacă $j > i$, avem:

$h_j([y^1, \ldots, y^{i-1}, 1, y^i, \ldots, y^j, \ldots, y^n]) =$

$$= h_j\left(\left[\frac{y^1}{y^{j-1}}, \ldots, \frac{y^{i-1}}{y^{j-1}}, \frac{1}{y^{j-1}}, \frac{y^i}{y^{j-1}}, \ldots, \frac{y^{j-2}}{y^{j-1}}, 1, \frac{y^j}{y^{j-1}}, \ldots, \frac{y^n}{y^{j-1}}\right]\right) =$$

$$= \left(\frac{y^1}{y^{j-1}}, \ldots, \frac{y^{i-1}}{y^{j-1}}, \frac{1}{y^{j-1}}, \frac{y^i}{y^{j-1}}, \ldots, \frac{y^{j-2}}{y^{j-1}}, \frac{y^j}{y^{j-1}}, \ldots, \frac{y^n}{y^{j-1}}\right)$$

şi este evident că pentru $y^{j-1} \neq 0$ componentele aplicaţiei $h_j \circ h_i^{-1}$ sunt diferenţiabile.

Rezultă că $P_n(\mathbf{R})$ este o varietate diferenţiabilă cu n dimensiuni.

Vom arăta în continuare că topologia de varietate a spaţiului proiectiv real $P_n(\mathbf{R})$ este separată. Fie x, $y \in U_i$. Atunci $h_i(x)$, $h_i(y) \in \square^n$, deci există două mulţimi deschise în $\square^n$, notate $U_{h_i(x)}$, $U_{h_i(y)}$ astfel încât:

$h_i(x) \in U_{h_i(x)}$, $h_i(y) \in U_{h_i(y)}$ şi $U_{h_i(x)} \cap U_{h_i(y)} = \emptyset$.

Rezultă că $h_i^{-1}(U_{h_i(x)})$ şi $h_i^{-1}(U_{h_i(y)})$ sunt mulţimi deschise în $P_n(\mathbf{R})$, verificând condiţiile $x \in h_i^{-1}(U_{h_i(x)})$, $y \in h_i^{-1}(U_{h_i(y)})$ şi

$h_i^{-1}(U_{h_i(x)}) \cap h_i^{-1}(U_{h_i(y)}) = h_i^{-1}(U_{h_i(x)} \cap U_{h_i(y)}) = h_i^{-1}(\emptyset)$, deci în cazul în care punctele x şi y se află în domeniul aceleiaşi hărţi, le putem separa.

Singurul caz pe care trebuie să-l discutăm este acela în care avem două puncte x, $y \in P_n(\mathbf{R})$ cu proprietăţile:

$x \in U_i$ dar $x \notin U_j$ şi $y \in U_j$ dar $y \notin U_i$. Presupunem că x şi y nu se separă. Fără a restrânge generalitatea vom presupune că i = 1 şi j = 2.

Aşadar, $x = [1, 0, x_3, \ldots, x_{n+1}]$, $y = [0, 1, y_3, \ldots, y_{n+1}]$.

Avem $h_1(x) = (1, x_3, \ldots, x_{n+1})$, $h_2(y) = (0, y_3, \ldots, y_{n+1})$.

Pentru aceste puncte considerăm vecinătatea $V = (-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathbf{R}^{n-1}$.

Deci $x \in h_1^{-1}(V)$ şi $y \in h_2^{-1}(V)$. Presupunem că $[z] \in h_1^{-1}(V) \cap h_2^{-1}(V)$.

Aşadar, $h_1([z]) \in V$ şi $h_2([z]) \in V$.

Dar $h_1([z]) = \left(\frac{z_2}{z_1}, \frac{z_3}{z_1}, \ldots, \frac{z_{n+1}}{z_1}\right)$, $h_2([z]) = \left(\frac{z_1}{z_2}, \frac{z_3}{z_2}, \ldots, \frac{z_{n+1}}{z_2}\right)$.

În concluzie, $\left|\frac{z_2}{z_1}\right| < \varepsilon$ şi $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| < \varepsilon$. Contrdicţie.

Rezultă $P_n(\mathbf{R})$ este varietate separată şi în acest caz.

Exemplul 4. Fie M o varietate diferenţiabilă de clasă C^k şi de dimensiune n şi fie U o mulţime deschisă în M. Vom arăta că U poate fi organizată ca varietate diferenţiabilă separată de clasă C^k şi de dimensiune n.

Fie $\mathcal{A} = \{(U_a, h_a) / a \in A\}$, un C^k-atlas de tip $\mathbb{R}^n$ pe M. Notăm $U'_a = U_a \cap U$, $h'_a = h_a|_{U'_a}$. Este evident că $U'_a \subset U$ şi că aplicaţia $h'_a : U'_a \to \mathbb{R}^n$ este injectivă, $\forall\, a \in A$.

Familia $\mathcal{A}' = \{(U'_a, h'_a) / a \in A\}$ este un C^k-atlas de tip $\mathbb{R}^n$ deoarece sunt verificate condiţiile:

i) $\bigcup\limits_{a\in A} U'_a = \bigcup\limits_{a\in A} (U_a \cap U) = \left(\bigcup\limits_{a\in A} U_a\right) \cap U = M \cap U = U,$

ii) pentru orice a, b $\in$ A, avem $h'_a(U'_a \cap U'_b) = h_a(U_a \cap U_b \cap U)$ deoarece $U_a \cap U_b \cap U$ este deschis, iar h_a este homeomorfism, rezultă $h'_a(U'_a \cap U'_b)$ este mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$.

iii) pentru orice a, b $\in$ A, cu $U'_a \cap U'_b \neq \emptyset$, aplicaţia $h'_b \circ h'^{-1}_a : h_a(U_a \cap U_b) \to \mathbb{R}^n$ este diferenţiabilă de clasă C^k.

Într-adevăr, avem: $h'_b \circ h'^{-1}_a = h_b \circ h_a^{-1}|_{h'_a(U_a \cap U_b)}$ şi cum restricţia unei aplicaţii diferenţiabile de clasă C^k la o mulţime deschisă este diferenţiabilă de clasă C^k, rezultă că $h'_b \circ h'^{-1}_a$ este diferenţiabilă de clasă C^k. Deoarece varietatea M este separată, rezultă că şi varietatea U este separată. Prin urmare U este varietate diferenţiabilă separată de clasă C^k şi de dimensiune n = dim M.

Exemplul 5. Fie $M_n(\mathbf{R})$ mulţimea matricilor pătratice de ordin n cu elemente în $\mathbf{R}$. Vom arăta cu mulţimea

GL(n, $\mathbf{R}$) = $\{a = \left\| a_i^j \right\| \in M_n(\mathbf{R}) / \det\left\| a_i^j \right\| \neq 0,\ i,j = 1, 2, \ldots,\}$

Poate fi structurată ca varietate analitică reală de dimensiune n^2.

Numerotăm elementele matricei $a = \left\| a_i^j \right\| \in$ GL(n, $\mathbf{R}$) în modul următor:

$$a = \begin{Vmatrix} x^1 & x^2 & \dots\ x^n \\ x^{n+1} & x^{n+2} & \dots x^{2n} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ x^{n^2-n+1} & x^{n^2-n+2} & \dots\ x^{n^2} \end{Vmatrix}$$

În acest fel, fiecărei matrice $a = \left\| a_i^j \right\| \in GL(n, \mathbf{R})$ îi asociem punctul $(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$. Este uşor de văzut că $GL(n, \mathbf{R})$ se identifică cu o mulţime deschisă în $\mathbf{R}^{n^2}$. Deci $GL(n, \mathbf{R})$ este varietate analitică reală de dimensiune n^2.

Exemplul 6. Fie $\mathcal{A} = \{(U_a, h_a) \ /\ a \in A\}$, un C^k-atlas de tip $\mathbb{R}^n$ pe M şi fie M′ o mulţime arbitrară. Presupunem că avem o aplicaţie bijectivă $h : M' \to M$. Notăm:

$U'_a = h^{-1}(U_a)$, $h'_a = h_a \circ h$

Vom arăta că $\mathcal{A}' = \{ (U'_a, h'_a) \ /\ a \in A \}$ este un C^k-atlas de tip $\mathbb{R}^n$ pe M′.

Într-adevăr, avem $U'_a \subset M'$, $\forall\, a \in A$, iar aplicaţia $h'_a : U'_a \to \mathbb{R}^n$ este injectivă, $\forall\, a \in A$. În plus, avem:

i) $\bigcup\limits_{a\in A} U'_a = \bigcup\limits_{a\in A} h^{-1}(U_a) = h^{-1}(\bigcup\limits_{a\in A} U_a) = h^{-1}(M) = M'$.

ii) Pentru orice $a, b \in A$ avem:

$$h'_a(U'_a \cap U'_b) = h_a \circ h(h^{-1}(U_a) \cap h^{-1}(U_b)) = h_a \circ h(h^{-1}(U_a \cap U_b)) =$$
$$= h_a(U_a \cap U_b),$$

deci $h'_a(U'_a \cap U'_b)$ este mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$.

iii) Fie $a, b \in A$ cu $U'_a \cap U'_b \neq \varnothing$ şi fie aplicaţia

$$h'_b \circ {h'_a}^{-1} : h'_a(U'_a \cap U'_b) \to \mathbb{R}^n$$

$$h'_b \circ {h'_a}^{-1} = (h_b \circ h) \circ (h_a \circ h)^{-1} = (h_b \circ h) \circ (h^{-1} \circ h_a^{-1}) = h_b \circ h_a^{-1},$$

deci aplicaţia $h'_b \circ {h'_a}^{-1}$ este diferenţiabilă de clasă C^k. Prin urmare M′ este varietate diferenţiabilă de clasă C^k şi de dimensiune n = M.

Presupunem că M este varietate separată. Vom arăta că M′ este varietate separată. Pe M′ avem o topologie de varietate . O mulţime U′ din M′ este mulţime deschisă dacă mulţimea h(U′) este este deschisă în M. Fie $p, q \in M'$. Notăm $x = h(p)$, $y = h(q)$. Deoarece h este bijecţie rezultă $x \neq y$. Cum M este varietate separată, rezultă că există două mulţimi deschise U_x şi U_y astfel încât $x \in U_x$, $y \in U_y$ şi $U_x \cap U_y = \varnothing$.

Rezultă că $h^{-1}(U_x \cap U_y) = h^{-1}(U_x) \cap h^{-1}(U_y) = \emptyset$, deci punctele $p \in h^{-1}(U_x)$ şi $q \in h^{-1}(U_y)$ se pot separa. Rezultă că M′ este varietate diferenţiabilă separată.

Exemplul 7. Considerăm aplicaţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definită prin $f(x^1, x^2) = (x^1 \cos x^2, x^1 \sin x^2, b x^2)$, b=const. $\neq 0$.
Vom arăta că M = Im f este varietate C^∞-diferenţiabilă de dimensiune 2(elicoidul drept).

Este evident că f este injecţie. Atunci aplicţia $f : \mathbb{R}^2 \to M$ este bijecţie şi conform exemplului anterior M este varietate C^∞-diferenţiabilă de dimensiune 2.

Exemplul 8. Considerăm un interval deschis $I \subseteq \mathbf{R}$ şi fie $C : I \to \mathbb{R}^n$ o aplicaţie diferenţiabilă(curbă parametrizată în $\mathbb{R}^n$). Dacă C este injecţie, atunci M = Im C este varietate diferenţiabilă de dimensiune n = 1.

Este evident că I este o varietate diferenţiabilă de dimensiune n = 1. Aplicaţia $C : I \to M$ este bijecţie şi conform exemplului 6 rezultă că M este varietate diferenţiabilă de dimensiune n = 1.

Exemplul 9. Considerăm aplicaţia aplicaţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definită prin
$f(x^1, x^2) = (a(x^1 + x^2), b(x^1 - x^2), 2x^1 x^2)$, $a > 0$, $b > 0$.
Vom arăta că M = Im f este varietate diferenţiabilă reală de clasă C^∞ şi de dimensiune doi(paraboloidul hiperbolic).

Este evident că aplicaţia f este injectivă. Atunci $f : \mathbb{R}^2 \to M$ este bijecţie şi conform exemplului 6 M este varietate C^∞-diferenţiabilă de dimensiune 2.

Exemplul 10. Considerăm mulţimea $U = \{ (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n \,/\, x^1, \ldots, x^n \neq \emptyset \}$ şi aplicaţia $f : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ definită prin:

$$f(x^1, \ldots, x^n) = (x^1, \ldots, x^n, \frac{1}{x^1 \ldots x^n}).$$

Vom arăta că M = Im f este vatrietate diferenţiabilă reală de clasă C^∞ şi de dimensiune n (varietate Ţiţeica).

Este evident că f este injectivă. Rezultă că $f : U \to M$ este bijecţie. Deoarece U este mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$, rezultă că U este varietate diferenţiabilă reală de clasă C^∞ şi de dimensiune n. Folosind exemplul 6, rezultă că M este varietate diferenţiabilă de clasă C^∞ şi de dimensiune n.

Exemplul 11. Considerăm mulţimea deschisă $U \subset \mathbb{R}^n$ şi fie $f : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ o imersie(hipersuprafaţă parametrizată în $\mathbb{R}^{n+1}$). Presupunem că f este injecţie. Atunci M = Im f este varietate diferenţiabilă cu n dimensiuni.

Într-adevăr, deoarece $f : U \to M$ este bijecţie, iar U este varietate diferenţiabilă de dimensiune n, rezultă că M este este varietate diferenţiabilă cu n dimensiuni.

Exemplul 12. Orice spaţiu vectorial real de dimensiune finită n poate fi reprezentat ca o varietate diferenţiabilă separată cu n dimensiuni.

Fie V un spaţiu vectorial real de dimensiun n şi fie $\{ f_1, . . . , f_n \}$ o bază în V. Evident, V este izomorf cu $\mathbb{R}^n$. Fie $\{ e_1, . . . , e_n \}$ baza canonică a lui $\mathbb{R}^n$. Există un unic izomorfism liniar $h : V \to \mathbb{R}^n$ care duce baza $\{ f_1, . . . , f_n \}$ în baza canonică $\{ e_1, . . . , e_n \}$. Este uşor de văzut că $\mathcal{A} = \{ (V, h) \}$ este un atlas pe V, deci V este varietate diferenţiabilă(de dimensiune n şi de clasă C^∞).

Pe V avem topologia de varietate(pentru care h este homeomorfism). Cum topologia lui $\mathbb{R}^n$ este separată, rezultă că şi topologia indusă pe V este separată.

Exemplul 13. Fie $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = 0\} \cup \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \geq 0, y = 1\}$. Vom arăta că M poate fi organizată ca o varietate diferenţiabilă neseparată de clasă C^∞ şi de dimensiune unu.

Notăm $U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = 0\}$ şi

$U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x < 0, y = 0\} \cup \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \geq 0, y = 1\}$.

Considerăm aplicaţiile:

$h_1 : U_1 \to \mathbb{R}$, $h_1(x, 0) = x$,

$h_2 : U_2 \to \mathbb{R}$, $h_2(x, 0) = x$, dacă $x < 0$ şi $h_2(x, 0) = x$, dacă $x \geq 0$.

Este evident că $U_1 \subset M$, $U_2 \subset M$ şi că h_1 şi h_2 sunt injective. În plus, avem:

i) $U_1 \cup U_2 = M$,

ii) $h_1(U_1 \cap U_2) = h_1(\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x < 0, y = 0\}) = (-\infty, 0)$.

Pentru orice $x \in (-\infty, 0)$, avem $h_2 \circ h_1^{-1} = Id_M$ este C^∞- diferenţiabilă. Deci familia $\mathcal{A} = \{(U_1, h_1), (U_2, h_2)\}$ este un atlas pe M. Rezultă că M este varietate C^∞- diferenţiabilă de dimensiune unu.

Observăm că punctele $(0, 0) \in U_1$ şi $(0,1) \in U_2$ nu se pot separa. Într-adevăr, fie V_1 o vecinătate deschisă a lui $0 \in \mathbb{R}$. Atunci $h_1^{-1}(V_1)$ este o vecinătate deschisă a lui $(0, 0) \in U_1$. Fie V_2 o vecinătate deschisă a lui $0 \in \mathbb{R}$. Atunci $h_2^{-1}(V_2)$ este o vecinătate deschisă a punctului $(0, 1) \in U_2$. Este evident că $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. Rezultă că $h_2^{-1}(V_2) \cap h_1^{-1}(V_1)$ este diferită de mulţimea vidă.

Exemplul 14. Fie M şi M′ două mulţimi nevide. Fie $\mathcal{A} = \{(U_a, h_a) \,/\, a \in A\}$, un C^k-atlas de tip $\mathbb{R}^n$ pe M, respectiv $\mathcal{A}' = \{(U'_{a'}, h'_{a'}) \,/\, a' \in A'\}$ este un $C^{k'}$-atlas de tip $\mathbb{R}^{n'}$ pe M′. Vom arăta că familia $\mathcal{A}'' = \{(U''_{(a,a')}, h''_{(a,a')}) \,/\, (a, a') \in A \times A \}$ este un $C^{k''}$-atlas de tip $\mathbb{R}^{n+n'}$ pe $M \times M'$, unde $k'' \leq \min (k, k')$ şi unde am notat

$U''_{(a,a')} = U_a \times U'_{a'}$, $h''_{(a,a')} = h_a \times h'_{a'}$.

Este evident că $U''_{(a,a')} \subset M \times M'$. Din $h''_{(a,a')}(x, x') = h''_{(a,a')}(y, y')$ rezultă $h_a(x) = h_a(y)$ şi $h'_{a'}(x) = h'_{a'}(y)$. Cum h_a şi $h'_{a'}$ sunt injective $\forall\, a \in A$ şi $\forall\, a' \in A'$, rezultă că $(x, x') = (y, y')$ şi deci aplicaţia $h''_{(a,a')} : U''_{(a,a')} \to \mathbb{R}^{n+n'}$ este injectivă, $\forall\, (a, a') \in A \times A'$.

Vom arăta în continuare că familia $\mathcal{A}''$ verifică condiţiile (A_1), (A_2), (A_3) din definiţia 1.1. Avem:

$$\bigcup_{(a,\, a')\in \mathcal{A}''} U''_{(a,a')} = \bigcup_{(a,\, a')\in \mathcal{A}''} (U_a \times U'_{a'}) = (\bigcup_{a\in A} U_a) \times (\bigcup_{a'\in A'} U'_{a'}) = M \times M'.$$

Fie $(a, a'), (b, b') \in A''$. Avem:

$$h''_{(a,a')}(U''_{(a,a')} \cap U''_{(b,b')}) = (h_a \times h'_{a'})((U_a \cap U'_{a'}) \times (U_b \cap U'_{b'})) =$$

$$= (h_a \times h'_{a'})((U_a \cap U_b) \times (U'_{a'} \cap U'_{b'})) = h_a(U_a \cap U_b) \times h'_{a'}(U'_{a'} \cap U'_{b'}).$$

Deoarece $h_a(U_a \cap U_b)$ este mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$ şi $h'_{a'}(U'_{a'} \cap U'_{b'})$ este mulţime deschisă în $\mathbb{R}^{n'}$ rezultă că $h''_{(a,a')}(U''_{(a,a')} \cap U''_{(b,b')})$ este mulţime deschisă în $\mathbb{R}^{n+n'}$.

Fie $(a, a'), (b, b') \in A''$ cu $U''_{(a,a')} \cap U''_{(b,b')} \neq \emptyset$. Arătăm acum că aplicaţia

$h''_{(b,b')} \circ h''^{-1}_{(a,a')} : h''_{(a,a')}(U''_{(a,a')} \cap U''_{(b,b')}) \to \mathbb{R}^{n+n'}$ este diferenţiabilă de clasă $C^{k''}$, unde $k'' \le \min(k, k')$. Pentru orice punct $(p, p') \in h''_{(a,a')}(U''_{(a,a')} \cap U''_{(b,b')}) = h_a(U_a \cap U_b) \times h'_{a'}(U'_{a'} \cap U'_{b'})$ avem:

$$h''_{(b,b')} \circ h''^{-1}_{(a,a')}(p, p') = h''_{(b,b')}(h_a^{-1}(p),\, h'^{-1}_{a'}(p')) = (h_b \times h'_{b'})(h_a^{-1}(p),\, h'^{-1}_{a'}(p')) =$$

$$= (h_b \circ h_a^{-1}(p),\, h'_{b'} \circ h'^{-1}_{a'}(p')).$$

Deoarece aplicaţia $h_b \circ h_a^{-1}$ (respectiv $h'_{b'} \circ h'^{-1}_{a'}$) este diferenţiabilă de clasă C^k (respectiv $C^{k'}$), rezultă că aplicaţia $h''_{(b,b')} \circ h''^{-1}_{(a,a')}$ este diferenţiabilă de clasă $C^{k''}$, unde $k'' \le \min(k, k')$.

Exemplul 15. Folosind exemplul precedent, obţinem că torul real cu n dimensiuni $T^n = \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{\text{de n ori}}$, unde S^1 este un cerc, este o varietate analitică reală cu n dimensiuni.

Exemplul 16. Folosind exemplul 14 obţinem că cilindrul real $\mathbb{R} \times S^1$ este o varietate analitică reală de dimensiune doi.

3. Funcţii C^∞-diferenţiabile între varietăţi

3.1. Definiţie. Fie $(M, \mathcal{A})$ (respectiv $(M', \mathcal{A}')$) o varietate diferenţiabilă de clasă C^k (respectiv $C^{k'}$) şi de dimensiune n(respectiv n').

Spunem că aplicaţia $f : M \to M'$ este diferenţiabilă de clasă C^r ($r \le \min(k, k')$) dacă:

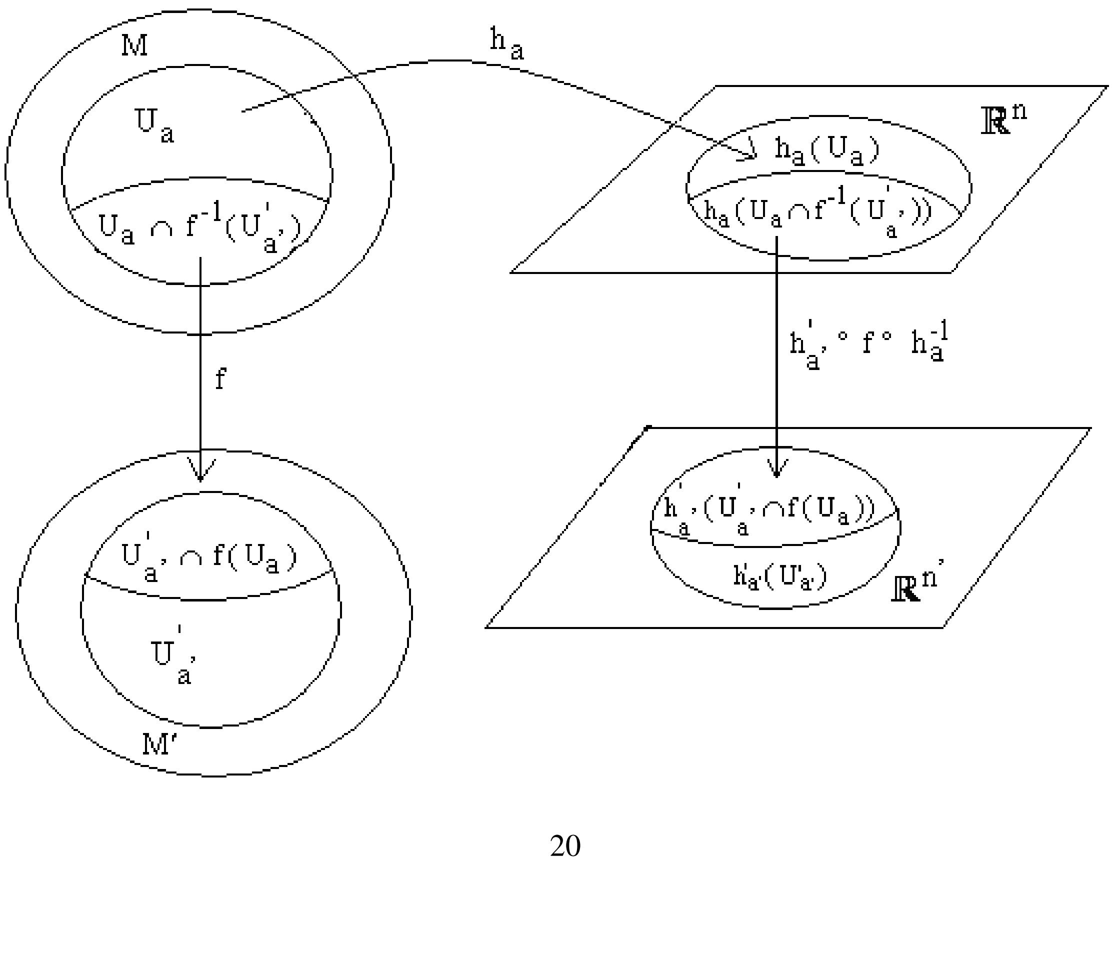
i) f este continuă;

ii) pentru orice $p \in M$, există $(U_a, h_a) \in \mathcal{A}$, $(U'_{a'}, h'_{a'}) \in \mathcal{A}'$ cu $p \in U_a$, $f(p) \in U'_{a'}$, astfel încât aplicaţia

$$h'_{a'} \circ f \circ h_a^{-1} : h_a(U_a \cap f^{-1}(U'_{a'})) \to h'_{a'}(U'_{a'} \cap f(U_a))$$

să fie diferenţiabilă de clasă C^r.

În continuare, dacă nu se specifică clasa de diferenţiabilitate a unei aplicaţii f, subînţelegem că f este C^∞- diferenţiabilă.



Dacă $M = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, atunci f se numeşte curbă în M'.

Dacă $M' = \mathbb{R}$, atunci f se numeşte funcţie reală diferenţiabilă definită pe M.

3.2. Definiţie. Aplicaţia $f : M \to M'$ se numeşte difeomorfism de clasă C^k dacă f este bijectivă şi atât f cât şi f^{-1} sunt aplicaţii diferenţiabile de clasă C^k.

Mulţimea funcţiilor reale diferenţiabile definite pe M se notează cu $\mathcal{F}(M)$. Fie $p \in M$, atunci prin $\mathcal{F}(p)$ se notează mulţimea funcţiilor reale diferenţiabile, al căror domeniu de definiţie conţine cel puţin o vecinătate a punctului p.

3.3. Propoziţie. Fie $(M, \mathcal{A} = \{(U_a, h_a) / a \in A\})$ o varietate diferenţiabilă de clasă C^k şi de dimensiune n. Atunci :

(i) $Id_M : p \in M \to Id_M(p) = p$ este difeomorfism de clasă C^k.

(ii) pentru orice $a \in A$, aplicaţia $h_a : U_a \to h_a(U_a) \subset \mathbb{R}^n$ este difeomorfism de clasă C^k.

Demonstraţie. (i) Pentru orice $a, b \in A$ cu $U_a \cap U_b \neq \emptyset$, aplicaţia

$h_b \circ h_a^{-1} = h_b \circ Id_M \circ h_a^{-1} : h_a(U_a \cap U_b) \to h_b(U_a \cap U_b)$ este difeomorfism de clasă C^k.

(ii) $h_a(U_a)$ este varietate C^k-diferenţiabilă şi de dimensiune n. Pe varieatea $h_a(U_a)$ avem un atlas construit dintr-o singură hartă

$\mathcal{A} = \{(h_a(U_a), Id_{h_a(U_a)}) / a \in A\}$. Deoarece $h_a : U_a \to h_a(U_a)$ este bijecţie, rezultă că pe varietatea U_a avem un atlas construit dintr-o singură hartă

$\mathcal{A}' = \{(U_a, h_a)\}$. Facem compunerea $Id_{h_a(U_a)} \circ h_a \circ h_a^{-1} = Id_{\mathbf{R}^n} |_{h_a(U_a)}$, care este aplicaţie C^k-diferenţiabilă.

Analog, arătăm că aplicaţia $h_a^{-1} : h_a(U_a) \to U_a$ este C^k-diferenţiabilă.

Q.E.D.

Notaţie. Fie M o varietate diferenţiabilă de dimensiune n. Notăm cu
$Dif(M) = \{f : M \to M / f$ este difeomorfism$\}$.
Atunci $(Dif(M), \circ)$ = grupul difeomorfismelor varietăţii diferenţiabile M.

Fie $G \subset Dif(M)$. Definim relaţia de echivalenţă „$\sqcup$ ” prin:
$x, y \in M$, $x \sqcup y \Leftrightarrow$ există $g \in G$ astfel încât $g(x) = y$.

3.4 Definiţie. Spunem că G acţionează propriu discontinuu în M dacă pentru orice x din M există U o vecinătate deschisă a lui x în M astfel încât pentru orice $g \in G$ cu $g \neq Id_M$ să avem $g(U) \cap U = \emptyset$.

3.5. Definiţie. Spunem că G acţionează separabil în M dacă pentru orice x şi y din M astfel încât $y \notin G(x) = \{g(x) / g \in G\}$, există U o vecinătate deschisă a lui x şi V o vecinătate deschisă a lui y astfel încât $(\forall)\ g \in G$ avem $V \cap g(U) = \emptyset$.

3.6. Teoremă. Fie M o varietate diferenţiabilă de dimensiune n, $G \subset \mathrm{Dif}(M)$ subgrup care acţionează propriu discontinuu şi separabil în M. Aunci mulţimea $M/_G$ este o varietate diferenţiabilă de dimensiune egală cu dimensiunea lui M.

Demonstraţie. (Pentru cazul particular al planului proiectiv)

$P_2(\mathbf{R}) = (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) / \mathbb{R}$, unde

$x \sqcup y \Leftrightarrow$ există $k \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $x = ky$.

Fie $S^2 = \{(u^1, u^2, u^3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, ((u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2) = r^2, r > 0\}$.

Pe S^2 se introduce următoarea relaţie de echivalenţă $x \sqcup y \Leftrightarrow x = \pm y$.

Observăm că $S^2 / \mathbb{R}$ este în bijecţie cu $P_2(\mathbf{R})$.

Luăm $M = S^2$ şi $G \subset \mathrm{Dif}(S^2) \approx (\mathbb{R}^2, +)$, $G = \{1_{S^2}, A\}$, unde

$A : S^2 \to S^2$ prin $A(x) = -x$, $(\forall)\, x \in S^2$.

Cum $A \circ A = A$ rezultă că aplicaţia A este difeomorfism.

Avem deci $P_2(\mathbf{R}) = S^2/\mathbb{R}^2$.

Arătăm că grupul G acţionează propriu discontinuu pe S^2.

Fie $x \in S^2$. Căutăm o vecinătate deschisă U a lui x astfel încât $A(U) \cap U = \varnothing$.

Fie $U_i^{\pm} = \{ x \in S^2 \,/\, x_i > 0 \text{ sau } x_i < 0\}$, $i = \overline{1,3}$. Avem că $\bigcup_{i=1}^{3} U_i^{\pm} = S^2$.

Luând $U = U_3^{+}$ rezultă că $A(U_3^{+}) \cap U_3^{+} = \varnothing$.

Arătăm că G acţionează separabil pe S^2.

Fie $x, y \in S^2$, $y \notin G(x) = \{g(x) \,/\, g \in G\} = \{-x, x\}$.

Căutăm U o vecinătate deschisă a lui x, respectiv V o vecinătate deschisă a lui y în S^2 astfel ca $A(U) \cap V = \varnothing$.

Fie $\varepsilon = d(x, y) < d(-x, y)$.

Luând $U = B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap S^2$ şi $V = B(y, \frac{\varepsilon}{2}) \cap S^2$, obţinem că G acţionează separabil.

Avem deci $P_2(\mathbf{R}) = S^2/_G$ varietate diferenţiabilă de dimensiune 2.

Q.E.D.

4. Vectori tangenţi. Vectori cotangenţi. Tensori

4.1. Definiţie. Fie M o varietate diferenţiabilă şi $p \in M$. Se numeşte vector tangent în p la varietatea diferenţiabilă M o aplicaţie $\mathbb{R}$-liniară $X_p : \mathcal{F}(p) \to \mathbb{R}$ cu următoarele proprietăţi:

1) $X_p(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot X_p(f)$;

2) $X_p(f\cdot g) = X_p(f)\cdot g(p) + X_p(g)\cdot f(p)$.

Notaţie. Notăm T_pM = spaţiul vectorilor tangenţi în punctul p la varietatea M.

4.2. Observaţie. Fie (U, h) hartă locală a varietăţii M. Notăm $x^i = \pi^i \circ h$, unde π^i sunt proiecţiile canonice în $\mathbb{R}^n$. Funcţiile x^i (i = 1, . . . ,n) se numesc funcţiile coordonate asociate hărţii (U, h)(sau coordonate locale în harta (U, h)).

Fie $p \in U$ şi fie $f \in \mathcal{F}(p)$. Notăm $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p = \left.\dfrac{\partial (f \circ h^{-1})}{\partial u^i}\right|_{h(p)}$.

Funcţia $f \circ h^{-1}$ se numeşte imaginea analitică a lui f în harta (U, h).

4.3. Teoremă. Fie M o varietate diferenţiabilă de dimensiune n şi $p \in M$. Atunci T_pM are o structură de spaţiu vectorial n-dimensional şi $\left\{\left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right\}_{i=\overline{1,n}}$ este bază în T_pM.

Demonstraţie. Definim următoarele operaţii:

„+” : $T_pM \times T_pM \to T_pM$

„•” : $\mathbb{R} \times T_pM \to T_pM$

Avem $(T_pM, +)$ grup abelian.

Pentru orice a, b $\in \mathbb{R}$ şi pentru orice $X_p, Y_p \in T_pM$ se verifică următoarele egalităţi:

$\to a(bX_p) = (ab)X_p$;

$\to a(X_p + Y_p) = aX_p + aY_p$;

$\to (a + b)X_p = aX_p + bX_p$;

$\to 1\cdot X_p = X_p$.

Arătăm că $\left\{\left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right\}_{i=\overline{1,n}}$ este bază în spaţiul vectorial T_pM:

i) Demonstrăm mai întâi că $\left\{\left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right\}_{i=\overline{1,n}}$ este sistem liniar independent

(i.e. $(\forall)\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ astfel încât $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0\ (\forall)\ i = \overline{1,n}$)

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (x_j) = 0,\ \forall\ j = \overline{1,n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(p) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_j^i = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_j = 0 \; (\forall)\; j = \overline{1,n}$$

ii) Arătăm că $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \right\}_{i=\overline{1,n}}$ este sistem de generatori pentru T_pM

(i.e. $(\forall)$ $X_p \in T_pM$, $(\exists)$ $X_p^i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$ astfel încât $X_p = X_p^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$).

Fie $\mathcal{A} = \{(U_a, h_a) \,/\, a \in A\}$, un C^k-atlas de tip $\mathbb{R}^n$ pe M. Presupunem (eventual efectuând o translaţie) că $h_a(p) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

$$\begin{tikzcd} h_a(U_a) \arrow[r, "h_a^{-1}"] \arrow[rr, bend right, "F"'] & U_a \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \end{tikzcd} \qquad F = f \circ h_a^{-1} \in \mathcal{F}(p)$$

$h_a(q) = (x^1, \ldots, x^n)$, $q \in U_a$

$$f(p) - f(q) = f(h_a^{-1}(x^1, \ldots, x^n)) - f(h_a^{-1}(0, \ldots, 0)) = F(x^1, \ldots, x^n) - F(0, \ldots, 0) =$$

$$= \int_0^1 \frac{dF}{dt}\left(\underbrace{tx^1}_{u^i}, \ldots, \underbrace{tx^n}_{u^n}\right) dt = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial u^i}\left(tx^1, \ldots, tx^n\right) x^i dt = x^i \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial F}{\partial u^i}\left(tx^1, \ldots, tx^n\right) dt}_{g_i(q)}$$

Deci, $f(q) - f(p) = \sum_{i=1}^{n} x^i g_i(q)$, $q \in U_a$

$f - f(p) = \sum_{i=1}^{n} x^i g_i \in \mathcal{F}(p)$

Din faptul că $X_p(\text{const}) = 0$, $X_p \in T_pM$, $X_p : \mathcal{F}(p) \to \mathbb{R}$ ne rezultă că

$$X_p(f - f(p)) = X_p\left(\sum_{i=1}^{n} x^i g_i\right)$$

$$X_p(f) - \underbrace{X_p(f(p))}_{=0} = \sum_{i=1}^{n} X_p(x^i g_i)$$

$$X_p(f) = X_p(x^i) g_i(p) + \underbrace{X^i(p)}_{=0} X_p(g_i) \qquad (h_a(p) = (0, \ldots, 0))$$

$$X_p(f) = X_p(x^i) g_i(p)$$

$$g_i(p) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial u^i}(0,...,0)\,dt = \frac{\partial (f \circ h_a^{-1})}{\partial u^i}(h_a(p)) = \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p$$

Cum $X_p(f) = X_p(x^i)\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p$ ne rezultă că $X_p(f) = X_p(x^i)\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p(f)$, $(\forall)\, f \in \mathcal{F}(p)$

$$X_p = X_p(x^i)\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$$

$$X_p^i = X_p(x^i)$$

Avem deci că $X_p = X_p^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$.

Q.E.D.

4.4. Exemplu. Transformarea componentelor unui vector tangent la schimbarea hărţii. Fie $X_p \in T_pM$ şi fie (U, h), (U', h') două hărţi locale astfel încât $p \in U \cap U'$. Fie $\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p\right\}$ (respectiv $\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x'^1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x'^n}\right|_p\right\}$) baza naturală definită în p de harta (U, h) (respectiv (U', h')). Avem:

$$X_p = X_p^j \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p = X'^j_p \left.\frac{\partial}{\partial x'^j}\right|_p, \text{ unde } X_p^j = X'^j_p(x^j).$$

Obţinem $X'^i_p = \left.\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\right|_p X_p^j$, unde $x'^i = x'^i(x^1, \ldots, x^n)$ sunt formulele ce definesc schimbarea de hartă $h' \circ h^{-1}$. Este uşor de văzut că cele două baze verifică relaţiile:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p = \left.\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\right|_p \left.\frac{\partial}{\partial x'^i}\right|_p, \quad \left.\frac{\partial}{\partial x'^j}\right|_p = \left.\frac{\partial x^i}{\partial x'^j}\right|_p \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p.$$

4.5. Teoremă. Fie M o varietate diferenţiabilă de clasă C^k şi de dimensiune n. Atunci $TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$ este varietate diferenţiabilă de clasă C^{k-1} şi de dimensiune 2n.

Demonstraţie. Fie (U, h) o hartă a varietăţii M, deci $U \subset M$ şi $h : U \to \mathbb{R}^n$ este aplicaţie injectivă. Notăm $x^1, \ldots, x^n$ funcţiile coordonate asociate hărţii (U, h). Construim aplicaţia:

$H : TU = \bigcup_{p \in U} T_pM \to h(U) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$, prin:

$H(X_p) = (h(p), X_p^1, \ldots, X_p^n)$, unde $p \in U$, $X_p = X_p^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \in T_pM \subset \bigcup_{p \in U} T_pM = TU \subset TM$.

Arătăm că H este injectivă.

Fie p, q $\in$ U şi X_p, $Y_p \in$ TU. Din egalitatea H(X_p) = H(Y_p) rezultă :

(h(p),) $X_p^1, \ldots, X_p^n$) = (h(q),) $Y_p^1, \ldots, Y_p^n$). Deci avem: h(p) = h(q) şi $X_p^i = Y_p^i$,

$i = \overline{1,n}$.

Deoarece aplicaţia h este injectivă, rezultă că p = q. Prin urmare, relaţia H(X_p) = H(Y_p) implică $X_p = Y_p$, adică H este injecţie. Deci perechea (TU, H) este o hartă pe TM. Este uşor de văzut că reuniunea domeniilor hărţilor de această formă ne dă TM.

Fie ($\overline{U}, \overline{h}$) o altă hartă pe M astfel încât $U \cap \overline{U} \neq \emptyset$ şi fie (T$\overline{U}$, $\overline{H}$) harta corespunzătoare pe TM. Avem TU $\cap$ T$\overline{U}$ = T(U $\cap$ $\overline{U}$). Deoarece U $\cap$ $\overline{U} \neq \emptyset$ rezultă TU $\cap$ T$\overline{U} \neq \emptyset$. Avem:

H(TU $\cap$ T$\overline{U}$) = H(T(U $\cap$ $\overline{U}$)) = h(U $\cap$ $\overline{U}$) $\times \mathbb{R}^n$, deci H(TU $\cap$ T$\overline{U}$) este mulţime deschisă în $\mathbb{R}^{2n}$. Să arătăm că aplicaţia $\overline{H} \circ H^{-1}$: h(U $\cap$ $\overline{U}$) $\times$ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{2n}$ este diferenţiabilă de clasă C^{k-1}.

Fie p $\in$ U $\cap$ $\overline{U}$, deci h(p) = u $\in$ h(U $\cap$ $\overline{U}$). Fie $v^1, \ldots, v^n \in \mathbb{R}$. Notăm cu $\overline{x}^1, \ldots, \overline{x}^n$ funcţiile coordonate ataşate hărţii ($\overline{U}, \overline{h}$). Avem:

$\overline{H} \circ H^{-1}(u, v^1, \ldots, v^n) = \overline{H}(H^{-1}(h(p), v^1, \ldots, v^n)) =$

$$= \overline{H}\left(v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p\right) = \overline{H}\left(v^i \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^i}\bigg|_p \frac{\partial}{\partial \overline{x}^j}\bigg|_p\right) = \left(\overline{h}(p), v^i \frac{\partial \overline{x}^1}{\partial x^i}\bigg|_p, \ldots, \frac{\partial \overline{x}^n}{\partial x^i}\bigg|_p\right) =$$

$= (\overline{h} \circ h^{-1}(u), \overline{v}^1, \ldots, \overline{v}^n)$, unde $\overline{v}^i = \dfrac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^i}\bigg|_p v^j$. Deci aplicaţia $\overline{H} \circ H^{-1}$ este diferenţiabilă de clasă C^{k-1}. Prin urmare, TM este varietate diferenţiabilă de clasă C^{k-1} şi de dimensiune 2n.

Q.E.D.

4.6. Propoziţie. Fie M o varietate diferenţiabilă. Atunci:

(i) aplicaţia π : TM $\to$ M, $\pi(X_p) = p$, $(\forall)$ $X_p \in T_pM$ este continuă şi deschisă.

(ii) dacă varietatea M este separată, atunci şi varietatea TM este separată.

Demonstraţie. (i) Fie U o mulţime deschisă în M. Arătăm că π^{-1}(U) este mulţime deschisă în TM. Fie $\{(U_a, h_a) / a \in A\}$ un atlas pe M . Acestui atlas îi corespunde un atlas $\{(TU_a, H_a) / a \in A\}$ pe TM. Avem $TU_a = \pi^{-1}(U_a)$ este mulţime deschisă în TM. Din egalitatea $U = \bigcup_{a \in A} U \cap U_a$ rezultă că $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{a \in A} \pi^{-1}(U \cap U_a)$.

Din ultima egalitate vedem că este suficient să arătăm că dacă avem o mulţime deschisă V în U_a, atunci π^{-1}(V) este mulţime deschisă în $\pi^{-1}(U_a)$.

Deoarece diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U_a) \arrow[r, "H_a"] \arrow[d, "\pi"'] & h_a(U_a)\times\mathbb{R}^n \arrow[d, "\pi_1"] \\
U_a \arrow[r, "h_a"'] & h_a(U_a)
\end{tikzcd}$$

este comutativă, rezultă $\pi\Big|_{\pi^{-1}(U_a)}$ este continuă, deci $\pi^{-1}(U \cap U_a)$ este mulţime deschisă $\pi^{-1}(U_a)$. Rezultă că $\bigcup\limits_{a\in A}\pi^{-1}(U\cap U_a) = \pi^{-1}(U)$ este mulţime deschisă în TM şi deci π este continuă. Analog, π este deschisă.

(ii) Fie X_p, $Y_p \in T_pM$ cu $X_p \neq Y_p$. Să arătăm că există două vecinătăţi deschise şi disjuncte în jurul lui X_p, respectiv Y_p.

Cazul $p \neq q$. Atunci există două vecinătăţi U_1, $U_2 \subset M$ cu proprietatea că $p \in \pi^{-1}(U_1)$. Analog se obţine $Y_p \in \pi^{-1}(U_2)$. Deoarece π este continuă, rezultă că $\pi^{-1}(U_1)$ şi $\pi^{-1}(U_2)$ sunt mulţimi deschise în TM. În plus, avem:
$\pi^{-1}(U_1) \cap \pi^{-1}(U_2) = \pi^{-1}(U_1 \cap U_2) = \pi^{-1}(\varnothing) = \varnothing$, deci TM este varietate separată.

Cazul $p = q$. Fie (U, h) o hartă în jurul punctului p. Avem:
$X_p = X_p^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$, $Y_p = Y_p^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$. Rezultă $H(X_p) = (h(p), x')$, $H(Y_p) = (h(p), y')$, unde $x' = (X_p^1, \ldots, X_p^n)$, $y' = (Y_p^1, \ldots, Y_p^n) \in \mathbb{R}^n$. Separăm punctele x' şi y' în $\square^{n}$. Rezultă că există două mulţimi deschise U', V' $\subset \mathbb{R}^n$, astfel încât
$x' \in$ U', $y' \in$ V' şi U' $\cap$ V' $= \varnothing$.
Obţinem: $(h(p), x') \in h(U) \times U'$, $(h(p), y') \in h(U) \times V'$ şi
$(h(U) \times U') \cap (h(U) \times V') = h(U) \times (U' \cap V') = \varnothing$.

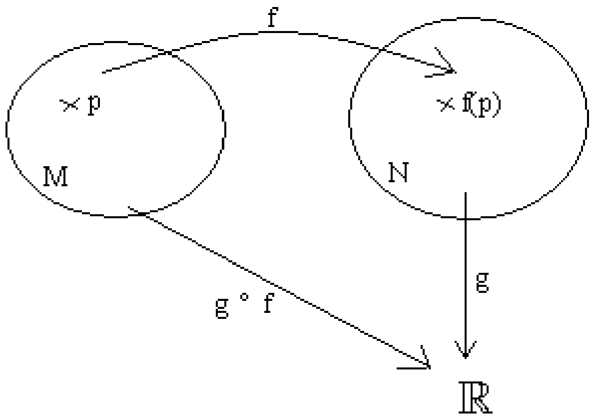
Deoarece H este homeomorfism, rezultă că $H^{-1}(h(U) \times U')$ şi $H^{-1}(h(U) \times V')$ sunt mulţimi deschise în TM. În plus, $X_p \in H^{-1}(h(U) \times U')$, $Y_p \in H^{-1}(h(U) \times V')$ şi $H^{-1}(h(U) \times U') \cap H^{-1}(h(U) \times V') = \varnothing$. Prin urmare, TM este varietate separată.

Q.E.D.

Diferenţiala unei aplicaţii diferenţiabile

4.7. Definiţie. Fie M, N două varietăţi diferenţiabile de dimensiune m, respectiv n şi fie $f : M \to N$ o aplicaţie diferenţiabilă. Diferenţiala lui f în punctul p este o aplicaţie $df(p) : T_pM \to T_{f(p)}N$ definită prin:

$df(p)(X_p)(g) = X_p(g \circ f)$, unde $X_p \in T_pM$ şi $g : N \to \mathbb{R}$.



4.8. Proprietăţi:

1) $df(p)(X_p) \in T_{f(p)}N$;

2) df(p) este aplicaţie liniară, adică: $df(p)(\lambda X_p + \mu Y_p) = \lambda df(p)(X_p) + \mu df(p)(Y_p)$ $(\forall) X_p, Y_p \in T_pM$;

3) $1_M : M \to M$, $d1_M(p) = 1_{T_pM}$, unde $d1_M : T_pM \to T_pM$;

4) dacă $f : M \to N$ este difeomorfism, atunci $df(p) : T_pM \to T_{f(p)}N$ este izomorfism.

4.9. Definiţie. Fie $p \in M$.Se numeşte vector cotangent în p la M o aplicaţie $\omega_p : T_pM \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ – liniară , adică $\omega_p(\alpha X_p + \beta Y_p) = \alpha\, \omega_p(X_p) + \beta\, \omega_p(Y_p)$, $(\forall)$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\forall)$ $X_p, Y_p \in T_pM$.

Notaţie. T_p^*M = mulţimea vectorilor cotangenţi în p la M.

4.10. Propoziţie. Fie M o varietate diferenţiabilă şi $p \in M$. Atunci:

(i) T_p^*M formează un spaţiu liniar;

(ii) $df(p) : X_p \in T_pM \to df(p)(X_p) = X_p(f) \in \mathbb{R}$ aparţine T_p^*M.

(iii) dacă (U, h) hartă a varietăţii M şi $x^1, \ldots, x^n$ coordonatele locale asociate hărţii (U, h), $\{dx^1(p), \ldots, dx^n(p)\}$ constituie o bază a spaţiului T_p^*M.

Demonstraţie. (i) Operaţiile de adunare a vectorilor cotangenţi şi de înmulţire a unui vector cotangent cu un scalar sunt definite prin:

$\omega_p + \eta_p : X_p \in T_pM \to (\omega_p + \eta_p)(X_p) = \omega_p(X_p) + \eta_p(X_p) \in \mathbb{R}$,

$\lambda\,\omega_p : X_p \in T_pM \to (\lambda\,\omega_p)(X_p) = \lambda\,\omega_p(X_p) \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) Se verifică fără dificultate că aplicaţia df(p) este liniară.

(iii) Fie numerele reale $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ cu $\lambda_i\, dx^i(p) = 0$ ($\in T_p^*M$). Rezultă $\lambda_i\, dx^i(p)\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right) = 0$, adică $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$, deci vectorii $dx^i(p)$ sunt liniar independenţi.

Fie $\omega_p \in T_p^*M$. Aplicând ω_p unui vector oarecare $X_p = X_p^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$, avem:

$dx^i(p)(X_p) = dx^i(p)\left(X_p^j \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right) = X_p^j \left.\frac{\partial x^i}{\partial x^j}\right|_p = X_p^i$, adică $\omega_p = \omega_i(p)\, dx^i(p)$, ceea ce ne arată că oricare element din T_p^*M se poate exprima ca o combinaţie liniară a vectorilor $dx^i(p)$. Elementele spaţiului T_p^*M se numesc vectori cotangenţi în p.

Q.E.D.

4.11. Teoremă. Fie M o varietate diferenţiabilă de clasă C^k şi de dimensiune n. Atunci:

(i) $T^*M = \bigcup_{p\in M} T^*M$ este varietate diferenţiabilă de clasă C^{k-1} şi de dimensiune 2n.

(ii) aplicaţia $\pi^* : T^*M \to M$ definită prin $\pi^*(\omega_p) = p$, $(\forall)\,\omega_p \in T_p^*M$ este continuă.

(iii) dacă varietatea M este separată, atunci şi varietatea T_p^*M este separată.

4.12. Definiţie. Fie M o varietate diferenţiabilă şi p ∈ M. Se numeşte tensor de tip (r, s) pe M în p o aplicaţie multiliniară:

$$A_p : \underbrace{T_pM \times \ldots \times T_pM}_{\text{s-ori}} \times \underbrace{T_p^*M \times \ldots \times T_p^*M}_{\text{r-ori}} \to \mathbb{R}.$$

Notaţie. $(T_s^r)_p M$ = mulţimea tensorilor de tip (r, s) în p la varietatea diferenţiabilă M.

4.13. Observaţie.

i) Dacă (r, s) = (0, 1), rezultă $(T_1^0)_p M \cong T_p^*M$,

ii) Dacă (r, s) = (1, 0), rezultă $(T_0^1)_p M \cong T_pM$.

4.14. Propoziţie. Fie M o varietate C^k – diferenţiabilă, de dimensiune n. Atunci:

i) $T_s^r M$ se poate organiza ca o varietate C^{k-1} – diferenţiabilă, de dimensiune $n + n^{r+s}$.

ii) Dacă M este varietate separată, atunci $T_s^r M$ este varietate separată

5. Scufundări. Teorema Whitney

5.1. Definiţie. Fie M, M′ două varietăţi diferenţiabile de dimensiune n, respectiv n′. O aplicaţie diferenţiabilă f : M $\to$ M′ se numeşte imersie dacă $(\forall)$ p $\in$ M
df(p) : $T_pM \to T_{f(p)}M'$ este injectivă.

5.2. Observaţie. $n \le n'$.

5.3. Definiţie. O aplicaţie f : M $\to$ M′ se numeşte scufundare dacă:

(i) este imersie şi este injectivă;

(ii) f : M $\to$ f(M) este homeomorfism.

Spunem că M se scufundă în M′.

Fie $\mathcal{A} = \{(U_a, h_a) / a \in A\}$, un C^k-atlas de tip $\mathbb{R}^n$ pe M, respectiv
$\mathcal{A}' = \{(U'_{a'}, h'_{a'}) / a' \in A'\}$ un $C^{k'}$-atlas de tip $\mathbb{R}^{n'}$ pe M′.

5.4. Observaţie. Spunem că aplicaţia diferenţiabilă f are rangul k în punctul $x = (x^1, \ldots, x^n) \in M$, dacă matricea $\left\| \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x) \right\|_{\substack{i=\overline{a,n'} \\ j=\overline{1,n}}}$ are rangul k. Dacă această matrice are rang maxim, atunci aplicaţia diferenţiabilă f este imersie.

5.5. Observaţie. Dacă f : M $\to$ M′ este imersie injectivă şi M este compactă, atunci f este scufundare.

5.6. Exemplu. Considerăm incluziunea f : p $\in S^n \to$ f(p) = p $\in \mathbb{R}^{n+1}$. Vom arăta că:

(i) f este diferenţiabilă;

(ii) f este imersie;

(iii) f este scufundare;

(iv) f(S^n) este varietate diferenţiabilă de dimensiune n;

(v) Aplicaţia f : $S^n \to S^n$ este difeomorfism.

Pentru a arăta (i) cosiderăm $\mathcal{A} = \{(U_N, h_N), U_S, h_S)\}$ un atlas de tip $\mathbb{R}^n$ pe S^n şi $\mathcal{A}' = \{\mathbb{R}^{n+1}, Id_{\mathbb{R}^{n+1}}\}$ un atlas pe $\mathbb{R}^{n+1}$.

Considerăm aplicaţia $Id_{\mathbb{R}^{n+1}} \circ f \circ h_N^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$.

Pentru $x^1, \ldots, x^n \in \mathbb{R}^n$, avem:

$$f \circ h_N^{-1}(x^1, \ldots, x^n) = f\left(\frac{2r^2x^1}{r^2+v^2}, \ldots, \frac{2r^2x^n}{r^2+v^2}, \frac{r(v^2-r^2)}{r^2+v^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{2r^2x^1}{r^2+v^2}, \ldots, \frac{2r^2x^n}{r^2+v^2}, \frac{r(v^2-r^2)}{r^2+v^2}\right) \in \mathbb{R}^{n+1},$$ unde am folosit notaţia $v^2 = \sum_{k=1}^{n}(x^k)^2$. Este evident că aplicaţia $f \circ h_N^{-1}$ este diferenţiabilă (componentele sunt diferenţiabile).

(ii) Va trebui să arătăm că în fiecare punct p $\in S^n$, rangul aplicaţiei f este n. Avem:

$$\frac{2(\mathrm{f}\circ \mathrm{h}_{\mathrm{N}}^{-1})^{j}}{2x^{k}} = \frac{2r^{2}[\delta_{k}^{j}(r^{2}+v^{2})-2x^{k}x^{j}}{r^{2}+v^{2}}, (\forall)\, j \in \{1, \ldots, n\},$$

$$\frac{2(\mathrm{f}\circ \mathrm{h}_{\mathrm{N}}^{-1})^{\mathrm{n+1}}}{2x^{k}} = \frac{4r^{3}x^{k}}{(r^{2}+v^{2})^{2}},$$

unde $(\mathrm{f}\circ \mathrm{h}_{\mathrm{N}}^{-1})^{1}, \ldots, (\mathrm{f}\circ \mathrm{h}_{\mathrm{N}}^{-1})^{n+1}$ sunt componentele aplicaţiei $\mathrm{f}\circ \mathrm{h}_{\mathrm{N}}^{-1}$.

Va trebui să calculăm rangul matricei:

$$\mathrm{J} = \left\| \begin{array}{ccccc} \frac{2r^{2}(r^{2}+v^{2})(x^{1})^{2}}{(r^{2}+v^{2})^{2}} & \frac{-4r^{2}x^{1}x^{2}}{(r^{2}+v^{2})^{2}} & \ldots & \frac{-4r^{2}x^{1}x^{n}}{(r^{2}+v^{2})^{2}} & \frac{-4r^{3}x^{1}}{(r^{2}+v^{2})^{2}} \\ \frac{-4r^{2}x^{1}x^{2}}{(r^{2}+v^{2})^{2}} & \frac{2r^{2}(r^{2}+v^{2}-2(x^{2})^{2})}{(r^{2}+v^{2})^{2}} & \ldots & \frac{-4r^{2}x^{1}x^{n}}{(r^{2}+v^{2})^{2}} & \frac{-4r^{3}x^{1}}{(r^{2}+v^{2})^{2}} \\ \vdots & & \vdots & & \\ \frac{-4r^{2}x^{1}x^{n}}{(r^{2}+v^{2})^{2}} & \frac{-4r^{2}x^{2}x^{n}}{(r^{2}+v^{2})^{2}} & \ldots & \frac{2r^{2}(r^{2}+v^{2}-2(x^{n})^{2})}{(r^{2}+v^{2})^{2}} & \frac{-4r^{3}x^{n}}{(r^{2}+v^{2})^{2}} \end{array} \right\|$$

Înmulţim primele n coloane cu $\frac{(r^{2}+v^{2})^{2}}{2r^{2}}$, iar ultima coloană o înmulţim cu $\frac{(r^{2}+v^{2})^{2}}{4r^{3}}$ şi obţinem următoarea matrice, echivalentă cu matricea J:

$$\left\| \begin{array}{ccccc} r^{2}+v^{2}-2(x^{1})^{2} & -2x^{1}x^{2} & \ldots & -2x^{1}x^{n} & x^{1} \\ -2x^{1}x^{2} & r^{2}+v^{2}-2(x^{2})^{2} & \ldots & -2x^{2}x^{n} & x^{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ -2x^{1}x^{n} & -2x^{2}x^{n} & \ldots & r^{2}+v^{2}-2(x^{2})^{2} & x^{n} \end{array} \right\|$$

Dacă adunăm la coloana k (k = 1, . . . , n) elementele ultimei coloane înmulţite cu $2\,x^{k}$, obţinem următoarea matrice, echivalentă cu matricea J:

$$\begin{vmatrix} r^2+v^2 & 0 & \dots & 0 & x^1 \\ 0 & r^2+v^2 & \dots & 0 & x^2 \\ \cdot & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & r^2+v^2 & x^n \end{vmatrix}$$

Rangul acestei matrice este n, deci rang J = n şi deci f este imersie.

(iii) Este uşor de văzut că f este imersie injectivă, deci scufundare.

(iv) Deoarece $f : S^n \to f(S^n) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ este bijecţie rezultă că $f(S^n)$ este varietate diferenţiabilă cu n dimensiuni.

(v) Se procedează la fel ca la punctul i).

5.7. Teoremă(Whitney) Orice varietate diferenţiabilă M se poate scufunda în $\mathbb{R}^{2m}$.

5.8. Observaţie.

$S^2 = \{(u^1, u^2, u^3) \in \mathbb{R}^3 / ((u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2) = r^2, r > 0\}$ se scufundă în $\mathbb{R}^3$.

5.9. Propoziţie. Orice suprafaţă compactă scufundată în $\mathbb{R}^3$ este orientabilă.

5.10. Lemă. (existenţa funcţiilor platou) Pentru orice $n \in \mathbb{R}^*$ există o funcţie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ C^∞- diferenţiabilă astfel încât $(\forall)\ x \in \mathcal{B}(0, 1)$, $f(x) = 1$ şi $(\forall)\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}(0, 2)$, $f(x) = 0$.

5.11. Lemă. (existenţa funcţiilor platou pe varietăţi). Fie M o varietate diferenţiabilă şi $p \in M$. Atunci există vecinătăţile deschise $W_p \subset V_p \subset U_p \subset M$ şi o funcţie $f : M \to \mathbb{R}$ C^∞- diferenţiabilă astfel încât:

1) $f \equiv 0$ pe $M \setminus V_p$;

2) $f \equiv 1$ pe $\overline{W_p}$;

3) $0 < f(x) < 1$, $(\forall)\ x \in V_p \setminus W_p$.

5.12. Teoremă(Teorema Whitney, varianta slabă) Orice varietate compactă M poate fi scufundată în $\mathbb{R}^n$.

Demonstraţie. Pentru orice $p \in M$, $W_p \subset V_p \subset U_p \subset M$ şi $f_p : M \to \mathbb{R}$ C^∞- diferenţiabilă cu $f \equiv 1$ pe $\overline{W_p}$ şi $f \equiv 0$ pe $M \setminus V_p$, $M = \bigcup_{p \in M} W_p$.

Luăm (U_p, h_p) hartă în jurul lui p, cu $h_i : U_i \to \mathbb{R}^m$

Cum M este compactă rezultă că există $\{p_1, \dots, p_k\}$ puncte în M astfel ca

$$M = \bigcup_{i=1}^{k} W_{p_i}.$$

Vrem să construim $F : M \to \mathbb{R}^n$ imersie injectivă.

$F(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x), f_1(x)\ h_1(x), \dots, f_k(x)\ h_k(x))$

Avem $n = k + mk = (m+1)k$.

Arătăm că aplicaţia F este injectivă.

Presupunem că există x, y $\in$ M astfel încât F(x) = F(y). Rezultă că există i_0 astfel încât $x \in W_{p_{i_0}}$.

Din $1 = f_{i_0}(x) = f_{i_0}(y)$ rezultă $y \in W_{p_{i_0}}$.

Vom avea $f_{i_0}(x) h_{i_0}(x) = f_{i_0}(x)\ h_{i_0}(y)$, de unde rezultă $h_{i_0}(x) = h_{i_0}(y)$.

Cum aplicaţiile h_{i_0} sunt injective, rezultă x = y.

Arătăm acum că F este imersie.

Fie p $\in$ M. Avem de arătat că $dF(p) : T_pM \to \mathbb{R}^n$ este injectivă.

$dF(p) = (d f_1(p), \ldots, d f_k(p), d(f_1 h_1)(p), \ldots, d(f_k h_k)(p))$

Ker $dF(p) = \{ X_p \in T_pM \ / \ dF(p)(X_p) = 0\}$.

Din $dF(p)(X_p) = 0$ rezultă $d(f_i h_i)(p)(X_p) = 0$.

Cum $d(f_i h_i)(p)$ este injectivă rezultă că $X_p = 0$.

Q.E.D.

6. Subvarietăţi

6.1. Definiţie. Fie M o varietate diferenţiabilă de dimensiune n + k şi S $\subset$ M. S se numeşte subvarietate de dimensiune n a lui M dacă pentru orice punct p $\in$ S, există o hartă $\varphi : U \to \mathbb{R}^{n+k}$ pe M cu p $\in$ U, $\varphi(p) = 0$ astfel încât

$\varphi(U \cap S) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) = \{x \in \varphi(U) \ / \ x^{n+1} = x^{n+2} = \ldots = x^{n+k} = 0\}$

6.2. Definiţie. Fie M, M′ două varietăţi diferenţiabile de dimensiune n, respectiv n′. O aplicaţie C^∞- diferenţiabilă $f : M \to M'$ se numeşte submersie în punctul p $\in$ M dacă $df(p) : T_pM \to T_{f(p)}M'$ este surjectivă.

Aplicaţia f este submersie dacă e submersie în orice punct p $\in$ M

6.3. Observaţie. $n \geq n'$.

6.4. Definiţie. Punctul q $\in$ M′ se numeşte valoare regulată aplicaţiei diferenţiabile $f : M \to M'$ dacă $q \notin$ Imf sau dacă $q \in$ Imf atunci f este submersie în orice punct din $f^{-1}(q)$.

În caz contrar, q se numeşte valoare critică.

6.5. Lemă (Teorema locală a submersiei). Fie $\overline{U} \subset \mathbb{R}^{n+k}$ un deschis şi fie $f : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ o aplicaţie C^∞- diferenţiabilă. Fie p $\in$ $\overline{U}$ astfel încât f este submersie în punctul p şi q valoare regulată a lui f. Atunci există:

→ o vecinătate deschisă U a lui p în $\overline{U} \subset \mathbb{R}^{n+k}$;

→ o vecinătate deschisă V a lui q în $\mathbb{R}^n$;

→ o vecinătate deschisă W a lui 0 în $\mathbb{R}^k$;

astfel încât $f|_U$ se reprezintă prin:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "H"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & V \times W \arrow[r, "pr_1"] & V \end{tikzcd}$$

Demonstrație. $df(p) : T_p\overline{U} \to T_{f(p)}\mathbb{R}^n$ este surjectivă și liniară.

$\mathrm{Kerdf}(p) \subset \mathbb{R}^{n+k}$
dim $\mathrm{Kerdf}(p) = k$.
$\mathbb{R}^{n+k} = \dim \mathrm{Ker}(df(p)) \oplus E$, cu dim $E = n$.
Definim $H : \overline{U} \to \mathbb{R}^n \times \mathrm{Kerdf}(p)$ astfel: $H(x) = (f(x)\rho(x))$, unde
$\rho(x)$ = proiecție pe Kerdf(p), $\rho : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathrm{Kerdf}(p)$ liniară.
Arătăm că $dH(p)(X_p)$ este izomorfism liniar.
Este suficient să arătăm că dH(p) este injectivă pentru că
$\dim T_p\overline{U} = \dim T_{H(p)}(\mathbb{R}^n \times \mathrm{Kerdf}(p)) \cong \mathbb{R}^{n+k}$
Luăm $X_p \in \mathrm{KerdH}(p)$, deci $dH(p)(X_p) = (0, 0)$.
Rezultă $df(p)(X_p) = 0$, deci $X_p \in \mathrm{Kerdf}(p)$.
Din $X_p = \rho(X_p) = 0$ rezultă $X_p = 0$.
Aplicând teorema funcției inverse lui $H : \overline{U} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ rezultă că există U o vecinătate a lui p, V vecinătate a luif(p) și W vecinătate a lui 0 astfel încât aplicația
$H : U \to V \times W$ să fie difeomorfism.

Q.E.D.

6.6. Lemă. Fie $f : M^{n+k} \to M'$ și $p \in M$ astfel încât f este submersie în p. Atunci există:

→ o vecinătate deschisă V a lui f(p) în M′;
→ o vecinătate deschisă W a lui 0 în $\mathbb{R}^k$;

astfel încât $f|_U$ se reprezintă prin:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "H"] \arrow[rr, bend right, "f|_U"'] & V \times W \arrow[r, "pr_1"] & V \end{tikzcd}$$

6.7. Teoremă.(Teorema valorii regulate) Fie M, N varietăți diferențiabile de dimensiuni $n + k$, respectiv n și $f : M \to N$ o aplicație C^∞- diferențiabilă, $q \in \mathrm{Imf}$, $S = f^{-1}(q)$. Dacă q este valoare regulată, atunci:

1) S este subvarietate a lui M de dim $k = n + k - n$.
2) $T_pS = \mathrm{Kerdf}(p)$, $p \in S$.

Demonstrație. Fie și $f : M \to N$ și $q \in \mathrm{Imf}$ valoare regulată. Vrem să arătăm că $S = f^{-1}(q)$ este subvarietate de dimensiune k în M.
1) Fie $p \in S$ și U, V, W ca în lema precedentă.
Putem presupune că V e domeniu de hartă în N și fie $\psi : V \to \Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Avem:

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "H"] \arrow[dr, "\varphi"'] & V \times W \arrow[r, "pr_1"] \arrow[d, "\psi \times 1_W"] & V \\
& \Omega \times W &
\end{tikzcd}$$

Aplicaţia $\varphi : U \to \Omega \times W$ este difeomorfism (e compunere de două difeomorfisme).
$\varphi = (\psi \times 1_W) \circ H$, deci φ este hartă în M.

$S \cap U \xrightarrow{H} \{q\} \times W$.
$S = f^{-1}(q)$, $(\forall)\ p \in S$ cu $f(p) = q$.

$$\begin{tikzcd}
S \cap U \arrow[r, "H"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \{q\} \times W \arrow[d] \\
& \{0\} \times W
\end{tikzcd}$$

Avem deci $\varphi(S \cap U) = \{0\} \times W$. Rezultă dim S = k.
2) Fie:

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, hook, "i"] & M \arrow[r, hook, "f"] & N \\
p \arrow[r, hook, "i"] \arrow[urr, bend right, "f \circ i = ct"'] & p &
\end{tikzcd}$$

$f \circ i$ = constantă, rezultă $d(f \circ i)(p) = 0$

$$\begin{array}{c} d(f \circ i)(p) = 0 \\ || \\ df(p) \circ di(p) = 0 \end{array}$$

Rezultă $\mathrm{Im}\,di(p) \subset \mathrm{Ker}\,df(p)$.
$\dim \mathrm{Im}\,di(p) = n + k - n = k = \dim T_pS$.
Cum $df(p) : T_pM \to T_qN$ este surjectivă, rezultă $\dim \mathrm{Ker}\,df(p) = n + k - n = k$, deci $\mathrm{Ker}\,df(p) = T_pS$.

Q.E.D.

7. Câmpuri tensoriale pe o varietate

7.1. Definiţie. Fie M o varietate diferenţiabilă. Se numeşte câmp de vectori tangenţi la M orice aplicaţie diferenţiabilă $X : p \in M \to X(p) = X_p \in T_pM \subset TM$. Mulţimea câmpurilor de vectori tangenţi la M se notează cu $\mathcal{X}(M)$.

7.2. Propoziţie. Notăm cu $\mathcal{F}(M)$ inelul funcţiilor reale diferenţiabile definite pe varietatea M. $\mathcal{X}(M)$ este un $\mathcal{F}(M)$ – modul în raport cu operaţiile de adunare a câmpurilor de vectori şi de înmulţire a unui câmp de vectori cu o funcţie, definite prin:

$X + Y : p \in M \to (X + Y)(p) = X_p + Y_p \in T_pM \subset TM.,$

$fX : p \in M \to (fX)(p) = f(p)\,X_p \in T_pM \subset TM.,$

oricare ar fi $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ şi oricare ar fi $f \in \mathcal{F}(M)$.

7.3. Definiţie. Aplicaţia $[\ ,\ ] : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ definită prin:
$[X, Y]_{(p)}(f) = X_{(p)}(Y(f)) - Y_{(p)}(X(f))$, unde
$X(f) : M \to \mathbb{R}$, $X(f)_{(q)} = X_{(q)}(f)$, $p \in M$, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, $f \in \mathcal{F}(M)$, se numeşte paranteză Lie.

7.4. Definiţie. Fie L o algebră peste un corp comutativ **K**. Notăm cu $[x, y]$ produsul a două elemente x, y din L. Spunem că L este o algebră Lie, dacă sunt îndeplinite condiţiile: $[\ ,\ ]$ este $\mathbb{R}$ –liniară şi are următoarele proprietăţi:

ii) este antisimetrică: $[x, y] = -[y, x]$, $(\forall)\ x, y \in L$;

iii) verifică identitatea lui Jacobi: $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$, $(\forall)\ x, y \in L$.

Fie L şi L′ două algebre Lie peste corpul **K**. Aplicaţia $h : L \to L'$ se numeşte homomorfism (respectiv izomorfism) de algebre Lie, dacă h este homomorfism (respectiv izomorfism) de spaţii vectoriale şi

$h([x, y]) = [h(x), h(y)]$.

Fie L o algebră Lie (peste corpul **K**) cu n dimensiuni şi fie $\{E_1, \dots, E_n\}$ o bază în spaţiul vectorial L. Relaţiile $[E_i, E_j] = c_{ij}^k E_k$ se numesc ecuaţiile de structură ale algebrei Lie, iar scalarii $c_{ij}^k \in$ **K** se numesc constantele de structură ale algebrei Lie în baza considerată.

7.5. Observaţie. Mulţimea $\mathcal{X}(M)$ a câmpurilor de vectori tangenţi la o varietate diferenţiabilă M poate fi structurată ca o algebră Lie peste corpul $\mathbb{R}$, ooperaţiile fiind:

$(X, Y) \in \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to X + Y \in \mathcal{X}(M),$

$(\lambda, X) \in \mathbb{R} \times \mathcal{X}(M) \to \lambda X \in \mathcal{X}(M),$

$(X, Y) \in \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to [X, Y] \in \mathcal{X}(M).$

7.6. Definiţie. O varietate diferenţiabilă M de dimensiune n se numeşte paralelizabilă dacă există n câmpuri de vectori tangenţi la M $\{X_1, \dots, X_n\}$ astfel încât $(\forall)\ p \in M$, $\{X_1(p), \dots, X_n(p)\}$ este bază în spaţiul tangent T_pM.

7.7. Exemplu. Vom arăta că:

i) $\mathbb{R}^n$ este varietate paralelizabilă,

ii) GL(n, $\mathbb{R}$) este o varietate paralelizabilă,
iii) dacă (U, h) este o hartă a varietăţii diferenţiabile M, este o varietate paralelizabilă,
iv) dimensiunea algebrei Lie $\mathcal{X}(\mathbb{R})$ este ∞.

Demonstraţie. i) Am văzut că $\mathbb{R}^n$ poate fi organizat ca varietate analitică cu ajutorul unui atlas construit dintr-o singură hartă ($\mathbb{R}^n$, $\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^n}$). Atunci câmpurile

$\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n} \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ ne dau în fiecare punct $p \in \mathbb{R}^n$ vectorii liniar independenţi

$\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p$. Deci, $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ paralelizează varietatea $\mathbb{R}^n$.

ii) Fie x_j^i funcţiile coordonate asociate hărţii (GL(n, $\mathbb{R}$), $\mathrm{Id}_{GL(n,\mathbb{R})}$). Atunci câmpurile $\frac{\partial}{\partial x_1^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n^n}$ paralelizează varietatea GL(n, $\mathbb{R}$).

iii) U este varietate diferenţiabilă de dimensiune n = dim M.
Dacă $x^1, \ldots, x^n$ sunt coordonate locale în harta (U, h), atunci câmpurile
$\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n} \in \mathcal{X}(U)$ paralelizează varietatea U.

iv) Ştim că $\mathbb{R}$ este varietate paralelizabilă. Atunci $\mathcal{F}(\mathbb{R})$-modulul $\mathcal{X}(\mathbb{R})$ are dimensiunea 1.

Notăm cu $\left\{\frac{d}{dx}\right\}$ baza naturală a $\mathcal{F}(\mathbb{R})$-modulului $\mathcal{X}(\mathbb{R})$. Orice câmp $X \in \mathcal{X}(\mathbb{R})$ se scrie $X = f\frac{d}{dx}$, unde $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ şi reciproc, oricărei funcţii $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ îi corespunde un câmp $X \in \mathcal{X}(\mathbb{R})$. Corespondenţa:

$f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \longrightarrow X = f\frac{d}{dx} \in \mathcal{X}(\mathbb{R})$ este bijecţie liniară între spaţiile vectoriale $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ şi $\mathcal{X}(\mathbb{R})$. Spaţiul vectorial $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ are, ca subspaţiu, spaţiu vectorial al polinoamelor $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Se ştie că $\dim \mathcal{P}(\mathbb{R}) = \infty$. Rezultă şi $\dim_{\mathbf{R}} \mathcal{F}(\mathbb{R}) = \infty$. Prin urmare, spaţiul vectorial $\mathcal{X}(\mathbb{R})$ are dimensiunea ∞, deci algebra Lie $\mathcal{X}(\mathbb{R})$ are dimensiunea ∞.

7.8. Definiţie. Fie M o varietate diferenţiabilă cu n dimensiuni. Se numeşte câmp de tensori de tipul (r, s) orice aplicaţie diferenţiabilă
$A : p \in M \to A_p \in (T_s^r)_p M \subset T_s^r M$.

Notăm cu $T_s^r(M)$ mulţimea câmpurilor de tensori de tipul (r, s)

7.9. Exemplu. Vom arăta că mulţimea $T_s^r(M)$ poate fi structurată ca modul peste inelul $\mathcal{F}(M)$

Cum operaţiile de adunare a două câmpuri de tensori de tipul (r, s) cu o funcţie sunt definite respectiv prin relaţiile:

$A + B : p \in M \to (A + B)(p) = A_p + B_p \in (T_s^r)_p M \subset T_s^r M$,

$fA : p \in M \to (fA)(p) = f(p)A_p \in (T^r_s)_p M \subset T^r_s M$,

oricare ar fi A, B $\in T^r_s(M)$ şi oricare ar fi f $\in \mathcal{F}(M)$. Operaţiile astfel definite ne conduc la elemente ale lui $T^r_s(M)$. Se verifică uşor axiomele unui modul.

8. Grupuri Lie. Grupuri de transformări cu un parametru

8.1. Definiţie. Fie G o varietate diferenţiabilă cu n dimensiuni şi fie

$\mu : (x, y) \in G \times G \to \mu(x, y) = xy \in G$

o lege de grup în mulţimea punctelor lui G. Se spune că G este un grup Lie dacă aplicaţia μ este diferenţiabilă şi dacă aplicaţia de inversare $j : x \in G \to x^{-1} \in G$ este diferenţiabilă.

8.2. Definiţie. Fie G un grup Lie şi fie M o varietate diferenţiabilă. Se numeşte acţiune (la stânga) a grupului Lie G în varietatea M orice aplicaţie diferenţiabilă $\gamma : G \times M \to M$ ce satisface condiţiile:

i) $\gamma(a, \gamma(b, p)) = \gamma(ab, p)$, $(\forall)$ a, b $\in$ G, $(\forall)$ p $\in$ M,

ii) $\gamma(e, p) = p$, $(\forall)$ p $\in$ M,

unde (a, b) $\to$ ab este operaţia grupală în G, iar *e* este elementul neutru al grupului G. Analog, se defineşte acţiunea la dreapta.

8.3. Observaţie. Acţiunea la stânga (respectiv dreapta) indusă de elementul a $\in$ G se mai notează $L_a : M \to M$, $L_a(p) = ap = \gamma(p, a)$ (respectiv $R_a : M \to M$, $R_a(p) = pa = \gamma(p, a)$).

Acţiunea grupului este *efectivă* (sau G este grup efectiv) dacă din $L_a = L_e$ rezultă a = e. Grupul G acţionează *fără puncte fixe* dacă $L_a(p) = p$, oricare ar fi p $\in$ M, implică a = e. Grupul G este *tranzitiv* dacă pentru orice p, q $\in$ M există a $\in$ G astfel încât $L_a(p) = q$. În caz că în plus G acţionează fără puncte fixe, spunem că G este *simplu tranzitiv*.

8.4. Definiţie. Numim transformare a varietăţii diferenţiabile M un difeomorfism de la M în M. Un grup cu un parametru de transformări ale lui M este o acţiune (la stânga sau la dreapta) a grupului Lie $\mathbb{R}$ în M, adică o aplicaţie $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$ cu proprietăţile:

(1) oricare ar fi s, t $\in \mathbb{R}$, $\varphi(t, \varphi(s, p)) = \varphi(s + t, p)$;

(2) oricare ar fi p $\in$ M, $\varphi(0, p) = p$.

8.5. Observaţie. Un grup local cu un parametru de transformări locale ale varietăţii diferenţiabile M este o aplicaţie $\varphi : I_\varepsilon \times M \to M$ ($I_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$), cu proprietăţile:

(1) oricare ar fi t $\in I_\varepsilon$, $\varphi_t : U \to \varphi_t(U)$ este difeomorfism;

(2) oricare ar fi t, s, t + s $\in I_\varepsilon$, p, $\varphi_t(p) \in U$, avem:

$\varphi_{t+s}(p) = \varphi_t(\varphi_s(p))$ şi $\varphi_t = id_U$.

Un câmp $X \in \mathcal{X}(M)$ indus de un grup (global) cu un parametru de transformări se numeşte complet. Nu orice câmp de vectori este complet. În schimb, orice câmp de vectori este indus de un unic grup local cu un parametru de transformări locale ale lui M.

8.6. Observaţie. Pe o varietate diferenţiabilă compactă M orice câmp $X \in \mathcal{X}(M)$ este complet.

Capitolul II. Sfere Paralelizabile
1. Spaţii fibrate diferenţiabile

1.1. Definiţie. Un spaţiu fibrat diferenţiabil (pe scurt, spaţiu fibrat) este un obiect geometric, format din:

i) trei varietăţi diferenţiabile: E (spaţiul total), M (spaţiul bază) şi F (fibra standard);

ii) o aplicaţie surjectivă diferenţiabilă $\pi : E \to M$, numită proiecţie;

iii) o acoperire deschisă $\mathcal{V}$ a lui M şi pentru orice $U \in \mathcal{V}$ presupunem că este dată $\varphi : \pi^{-1}(U) \to F$ astfel încât $(\pi, \varphi) : \pi^{-1}(U) \to U \times F$ este difeomorfism; (aplicaţia (π, φ) se numeşte hartă a fibrării sau trivializare locală a lui E pe U).

Notăm spaţiul fibrat vectorial respectiv cu (E, π, M, F). Mulţimea hărţilor fibrării poartă numele de atlasul structural (sau de trivializare).

Pentru orice $p \in M$, mulţimea $E_p = \pi^{-1}(\{p\})$ se numeşte fibra în punctul p. Fiecare fibră a lui E este subvarietate în E, difeomorfă cu fibra standard F.

Fie $\psi\big|_{E_p} : E_p \to F$, unde $p \in U$ şi (π, ψ) este hartă locală peste $U \subset M$. Fie Diff(f) grupul difeomorfismelor lui F cu operaţia de compunere. Dacă (π, φ) şi (π, ψ) pe deschişii U şi V din M sunt hărţi ale fibratului (E, π, M, F) cu $U \cap V \neq \emptyset$, atunci aplicaţia $f_{\varphi,\psi} : U \cap V \to \mathrm{Diff}(F)$ prin $f_{\varphi,\psi}(p) = \varphi \circ (\psi\big|_{E_p})^{-1}$ se numeşte funcţie de tranziţie de la ψ la φ.

Evident, dim E = dim M + dim F.

1.2. Propoziţie. Fie (π, φ), (π, η) hărţi ale fibrării (E, π, M, F) pe U, V, respectiv W deschişi în M. Atunci:

(i) $f_{\varphi\varphi} = \mathrm{id}_F$,

(ii) $f_{\varphi\psi}(p) = f_{\varphi\eta}(p) \circ f_{\eta\psi}(p)$, oricare ar fi $p \in U \cap V \cap W$,

(iii) $(f_{\varphi\psi}(p))^{-1} = f_{\varphi\psi}(p)$.

Demonstraţie. (ii) Conform definiţiei, pentru orice $p \in U \cap V \cap W$ avem $f_{\varphi\eta}(p) \circ f_{\eta\psi}(p) = \varphi \circ (\eta\big|_{E_p})^{-1} \circ \eta \circ (\psi\big|_{E_p}) = f_{\varphi\psi}(p)$; (i) şi (iii) rezultă din (ii) particularizând $\psi = \eta = \varphi$, respectiv $\psi = \varphi$.

Q.E.D.

1.3. Observaţie. Fie spaţiul fibrat (E, π, M, F) şi G un grup Lie care acţionează pe F la stânga. Hărţile fibratului (π, φ) şi (π, ψ) pe U respectiv V deschişi în M se numesc G $-$compatibile dacă sau $U \cap V = \emptyset$ sau în caz contrar există $a \in G$ astfel încât $f_{\varphi\psi}(p) = L_a : F \to F$. În acest caz, identificăm $f_{\varphi\psi}(p)$ cu a.

Fie G un grup Lie. Un fibrat (E, π, M, F) se numeşte fibrat cu grup structural G dacă G este grup de transformări (la stânga) ale lui F şi dacă există un atlas de fibrat $\mathcal{A}$ pe E astfel încât orice două hărţi din $\mathcal{A}$ să fie G $-$compatibile. Notăm un asemenea fibrat cu (E, π, M, F, G) sau, când atlasul $\mathcal{A}$ nu se subînţelege, cu (E, π, M, F, G, $\mathcal{A}$).

1.4. Propoziţie. Fie M şi N varietăţi diferenţiabile şi $pr_1 : M \times N \to M$, $pr_1(p, q) = p$ proiecţia canonică. Atunci $\{M \times N, pr_1, M, N, \{id_N\}\}$ este fibrat diferenţiabil de grup structural $G = \{id_N\}$ şi cu atlasul structural $\mathcal{A} = \{M \times N, id_{M\times N}\}$. (Acest fibrat se numeşte trivial).

Demonstraţie. Produsul $M \times N$ este varietate diferenţiabilă.

Evident, pr_1 este diferenţiabilă şi surjectivă. Considerăm acoperirea deschisă {M} a lui M şi atlasul de trivializare format numai din harta (pr_1, pr_2), cu

$pr_2 : pr_1^{-1}(M) = M \times N \to N$, $pr_2(p, q) = q$. Aplicaţia (pr_1, pr_2) este difeomorfism, iar atlasul considerat este G $-$compatibil, deoarece pentru orice $p \in M$ avem:

$$f_{pr_1 pr_2}(p) = pr_2 \circ (pr_2\big|_{(M\times N)_p})^{-1} = id_N \in G.$$

Q.E.D.

1.5. Propoziţie. Fie $E = (\mathbb{R} \times (-1, 1)) / \mathbb{R}$ banda lui Möbius şi cercul $S^1 = \mathbb{R} / \mathbb{R}$. Considerăm aplicţiile $\pi : E \to S^1$, $\varphi : \pi^{-1}(U) \to (-1, 1)$, $\psi : \pi^{-1}(V) \to (-1, 1)$ definite prin:

$\pi([p,q]) = [p]$, $\varphi([p,q]) = q$, $\psi([p, q]) = -q$,

unde U şi V sunt deschişi în S^1, cu proprietatea că $U = \{p \in S^1 \,/\, |p| < \pi\}$ şi $V = \{|p| \in S^1 \,/\, p \in (0, 2\pi)\}$. Am notat prin [p,q], [p] clasele de echivalenţă (modulo $\mathbb{R}$) în E respectiv S^1. Fie atlasul $\mathcal{A} = \{(\pi, \varphi), (\pi, \psi)\}$. Atunci (E, π, S^1, $(-1, 1)$, $\mathbb{R}_2$, $\mathcal{A}$) este un fibrta diferenţiabil de grup structural $\mathbb{R}_2$.

Demonstraţie. Mulţimile E şi S^1 sunt varietăţi diferenţiabile. Considerăm diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \times (-1, 1) \arrow[r, "pr_1"] \arrow[d, "\theta"] & \mathbb{R} \arrow[d, "\theta'"] \\
E = \dfrac{\mathbb{R} \times (-1, 1)}{\mathbb{Z}} \arrow[r, "\pi"] & \mathbb{R} / \mathbb{Z} = S^1
\end{tikzcd}$$

Unde θ şi θ' sunt proiecţiile canonice. Deoarece $2\pi\mathbb{R} \subset \mathrm{Ker}\ (\theta' \circ pr_1)$, rezultă că diagrama este comutativă. (Am folosit şi faptul că $\mathbb{R} \cong 2\pi\ \mathbb{R}$).

Aplicaţia $\pi \circ \theta = \theta' \circ pr_1$ este surjectivă (este compunere de aplicaţii surjective), de unde rezultă că şi π este surjectivă. Din surjectivitatea lui θ, împreună cu diferenţiabilitatea lui $\pi \circ \theta$ reiese diferenţiabilitatea lui π.

Considerăm aplicaţia $(\pi, \varphi) : \pi^{-1}(U) \to (-1, 1)$, prin:

$(\pi, \varphi)([p, q]) = ([p], q)$.

Din $([p], q) = ([p'], q')$ rezultă $q = q$ şi $p - p' = 2\pi n$, dar $p, p' \in (-\pi, \pi)$, deci $p = p'$, adică $n = 0$. Rezultă că (π, φ) este injectivă. Deoarece surjectivitatea este evidentă, obţinem că (π, φ) este difeomorfism.

Analog, se arată că (π, ψ) este difeomorfism.

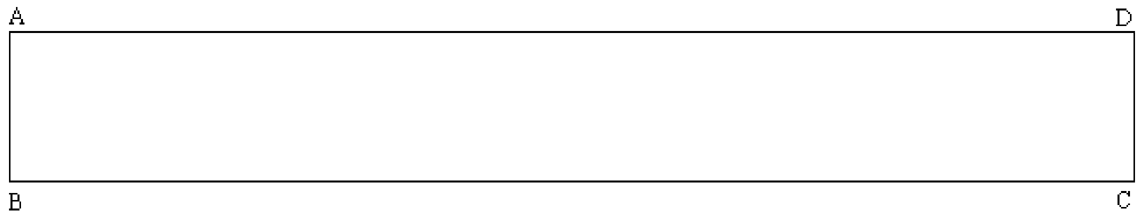
Considerăm pe $U \cap V \neq \varnothing$ funcţia de tranziţie

$f_{\varphi\psi}(p) : (-1, 1) \to (-1, 1)$ prin $f_{\varphi\psi}(p) = \varphi \circ (\psi|_{E_p})^{-1}$, $(\forall)\ p \in U \cap V$.

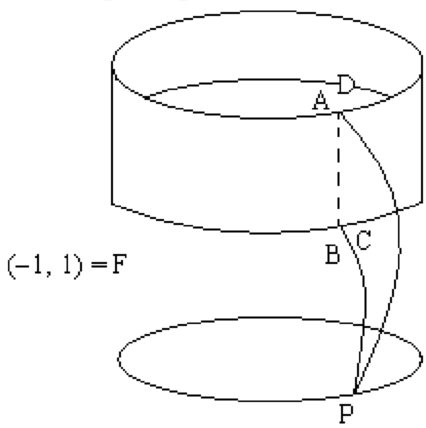
Avem $f_{\varphi\psi}(p)(q) = \varphi([p, q]) = -q$, deci $f_{\varphi\psi}(p)$ poate fi identificată cu un element din $\mathbb{R}_2$. În concluzie, atlasul $\mathcal{A}$ este G –compatibil.

Q.E.D.

1.6. Observaţie. Comparăm în cele ce urmează ”construcţia” unui cilindru cu cea a benzii lui Möbius: din dreptunghiul ”de hârtie”



obţinem ”prin lipire”:



$E = S^1 \times (-1, 1) = (\mathbb{R} / \mathbb{R}) \times (-1, 1)$

Grupul structural este trivial (conform Propoziţiei 1.2)

$E = \frac{\mathbb{R}/(-1,1)}{\mathbb{R}}$

Grupul structural este $\mathbb{R}_2$.

Un fibrat cu grup structural trivial se numeşte *fibrat trivial*. În concluzie, pentru ”a construi” un spaţiu fibrat nu este suficient să se fixeze doar fibra standard, spaţiul bază şi o acoperire deschisă a acestuia. Mai general, avem:

Teorema de construcţie a spaţiilor fibrate.

Fie un spaţiu topologic M, $\{U_i\}_{i\in I}$ o acoperire deschisă a lui, G un grup topologic de transformări ale unui spaţiu topologic F, acţionând efectiv şi

$f_{ij} : U_i \cap U_j \to G$ un sistem de funcţii continue cu proprietatea că

$(\forall)\ p \in U_i \cap U_j \cap U_k$, $f_{ij}(p) \circ f_{jk}(p)$.

Atunci există un spaţiu fibrat (în general, fără structură diferenţiabilă) cu spaţiul bază B, fibra tip F, grupul structural G şi având drept funcţii de tranziţie pe f_{ij}.

1.7. Propoziţie. Fie M o varietate diferenţiabilă de dimensiune n, TM varietatea tangentă, π proiecţia canonică $TM \to M$. Considerăm acoperirea deschisă $\{U_i\}_{i\in I}$ a lui M şi aplicaţiile $(\pi, dx) : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$,

$(\pi, dx)(v) = (\pi(v), dx^1(v, \ldots, dx^n(v))$, cu $x^1, \ldots, x^n$ sistem de coordonate pe U. Notăm mulţimea acestor aplicaţii cu $\mathcal{A}$. Atunci $(TM, \pi, M, \mathbb{R}^n, GL(n, \mathbb{R}), \mathcal{A})$ este fibrat diferenţiabil.

Demonstraţie. TM este varietate diferenţiabilă. Grupul $GL(n, \mathbb{R})$ este grup Lie şi acţionează (efectiv) la stânga pe $\mathbb{R}^n$:

dacă $A \in GL(n, \mathbf{R})$, $A = (a^i_j)_{1\le i,j\le n}$ şi $\lambda = (\lambda^i)_{1\le i\le n} \in \mathbb{R}^n$, avem

$(A, \lambda) \to A\lambda = (a^i_j\lambda^j)_{1\le i\le n} \in \mathbb{R}^n$.

Fie (U, h) hartă a varietăţii M, cu coordonatele $(x^1, \ldots, x^n)$. Harta de fibrat indusă pe U este $(\pi, dx) : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$,

$(\pi, dx)(v) = (\pi(v), dx^1(v, \ldots, dx^n(v))$

Aceasta este este diferită da harta de varietate a spaţiului total TM indusă de (U, h), care este:

$(h \circ \pi, dx) : \pi^{-1}(U) \to h(U) \times \mathbb{R}^n$,

$(h \circ \pi, dx)(v) = (h \circ \pi(v), dx^1(v, \ldots, dx^n(v))$.

Fie (π, φ), (π, ψ) hărţi de fibrat pe U, respectiv V deschişi în M, $\varphi = dx$, $\psi = dy$. Fie $p \in U \cap V \neq \emptyset$. Funcţia de tranziţie

$f_{\varphi\psi}(p)$ □ $\varphi \circ (\psi\big|_{(TM)_p})^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se scrie în punctul $\lambda \in \mathbb{R}^n$

$$f_{\varphi\psi}(p)(\lambda) = \varphi\left(\lambda^i \frac{\partial}{\partial y^i}\bigg|_p\right) = \varphi\left(\lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p . \lambda^i \frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p\right) = A\lambda,$$

unde $A = \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\bigg|_p\right)_{1\le i, j\le n} \in GL(n, \mathbf{R})$. În concluzie, orice două hărţi din $\mathcal{A}$ sunt $GL(n, \mathbf{R})$ –compatibile. (am folosit faptul că acţiunea lui G este efectivă când am dedus din $f_{\varphi\psi}(p)(\lambda) = A\lambda$, $(\forall)\ \lambda \in \mathbb{R}^n$ că $f_{\varphi\psi}(p) = A \in GL(n, \mathbf{R})$).

Q.E.D.

1.8. Observaţie. Fie V un spaţiu vectorial m-dimensional peste corpul **F** (**F** este $\mathbf{R}$ sau □). Un spaţiu fibrat E peste M cu fibra standard V se numeşte **F**-fibrat vectorial, dacă fiecare fibră a lui E este înzestrată cu o structură de spaţiu vectorial peste **F** şi dacă există un atlas de fibrat $\mathcal{A}$ astfel încât orice hartă de fibrat să fie liniară pe fibră (adică pentru
(π, φ) hartă pe U în M, $(\pi, \varphi) : \pi^{-1}(U) \to U \times V$ aparţinând lui $\mathcal{A}$, să avem
$\varphi\big|_{E_p} : E_p \to V$ izomorfism de spaţii vectoriale, oricare ar fi $p \in U$).

1.9. Propoziţie. Fie M o varietate diferenţiabilă de dimensiune n.

(i) Dacă V este un spaţiu vectorial m-dimensional peste corpul **F** (**F** este $\mathbf{R}$ sau $\mathbb{R}$), atunci $(M \times V,\ pr_1, M, \{ id_V \})$ este fibrat vectorial de rang m peste **F**.

(ii) Fibratul tangent TM şi fibratul cotangent T^*M sunt fibrate vectoriale de rang n.

(iii) Fibratul tensorilor de tip (p, q) este fibrat vectorial real de rang n^{p+q}.

2. Sfere paralelizabile

2.1. Fie p un punct al sferei unitate $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Vom arăta că:

(i) Mulţimea $p^\perp = \{v \in \mathbb{R}^{n+1}\ /\ <v, p> = 0\}$ este un subspaţiu n-dimensional al spaţiului vectorial $\mathbb{R}^{n+1}$.

(ii) Spaţiul tangent T_pS^n este izomorf cu $p^\perp$.

(iii) Cercul S^1 este o varietate paralelizabilă.

(iv) Sfera S^3 este o varietate paralelizabilă.

(v) Sfera S^7 este o varietate paralelizabilă.

Demonstraţie. (i) Evident.

(ii) Considerăm incluziunea $f : p \in S^n \to f(p) = p \in \mathbb{R}^{n+1}$ şi fie funcţia
$h : (u^1, \ldots, u^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \to h(u^1, \ldots, u^{n+1}) = (u^1)^2 + \ldots + (u^{n+1})^2 \in \mathbf{R}$.
Pentru orice $p = (u^1, \ldots\ldots, u^{n+1}) \in S^n$ avem:

$h \circ f(u^1, \ldots, u^{n+1}) = h(u^1, \ldots, u^{n+1}) = (u^1)^2 + \ldots + (u^{n+1})^2 = 1.$
Rezultă că $h \circ f$ = constant. Prin urmare, avem $dh_{f(p)} \circ df_p = 0\ (\forall)\ p \in S^n$.
Ultima egalitate implică:
(*) $dh_{f(p)} \circ df_p(E_p) = 0,\ (\forall)\ E_p \in T_pS^n$.

Deoarece $df_p(E_p)$ este un vector tangent al varietăţii $\mathbb{R}^{n+1}$ în f(p), avem

$df_p(E_p) = \sum_{i=1}^{n+1} (df_p(E_p))^i \left.\frac{\partial}{\partial u^i}\right|_{f(p)}$. Din (*) rezultă

$$\sum_{i=1}^{n+1} (df_p(E_p))^i dh_{f(p)} \left(\left.\frac{\partial}{\partial u^i}\right|_{f(p)} \right) = 0 \text{ sau}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} (df_p(E_p))^i \left.\frac{\partial(x \circ h)}{\partial u^i}\right|_{f(p)} \left.\frac{d}{dx}\right|_{h \circ f(p)} = 0,$$

Unde $\left\{ \left.\frac{d}{dx}\right|_{h \circ f(p)} \right\}$ este baza canonică a spaţiului tangent $T_{h(f(p))}\mathbf{R}$. Rezultă:

$$\sum_{i=1}^{n+1} (df_p(E_p))^i \frac{\partial}{\partial u^i}((u^1)^2 + \ldots + (u^{n+1})^2) = 0 \text{ sau}$$

$\sum_{i=1}^{n+1} (df_p(E_p))^i u^i = 0$, ceea ce ne arată că $df_p(E_p) \in p^\perp$, $(\forall)\ E_p \in T_pS^n$ şi deci $df_p(T_pS^n) \subset p^\perp$.

Deoarece f este imersie, rezultă că aplicaţia liniară df_p este injectivă, şi deci $df_p(T_pS^n)$ este spaţiu vectorial de dimensiune n. Deoarece dimensiunea spaţiului vectorial $p^\perp$ este n, rezultă că $df_p(T_pS^n) = p^\perp$ şi deci aplicaţia $df_p : T_pS^n \to p^\perp$ este un izomorfism liniar.

Observaţie. Din cele de mai sus rezultă că problema construirii unui câmp X de vectori tangenţi la S^n se reduce la problema construirii a n + 1 funcţii diferenţiabile.
$(df(E))^i : p = (u^1, \ldots, u^{n+1}) \in S^n \to (df(E))^i(p) \in \mathbf{R}$, i = 1, 2, . . . , n + 1, verificând condiţia:

(**) $\sum_{i=1}^{n+1} u^i (df(E))^i(p) = 0.$

În cele ce urmează, vom indica aceste funcţii în cazul cercului S^1 şi al sferelor S^3 şi S^7.

(iii) Fie $p = (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2$. Notăm $z = u^1 + i u^2 \in \mathbb{R}$.
Definim un câmp $Y \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^2)$ ca având componentele lui $iz = -u^2 + i u^1 \in \mathbb{R}$, adică
$Y = -u^2 \dfrac{\partial}{\partial u^1} + u^1 \dfrac{\partial}{\partial u^2}$.

Este evident că în punctele cercului $S^1 = \{y \in \mathbb{R} \ / \ |z| = 1\}$, câmpul Y nu se anulează.

Fie $f : p \in S^1 \to f(p) = p \in \mathbb{R}^2$ aplicaţia incluziune şi fie
$Y\Big|_{f(S^1)} = -u^2 \dfrac{\partial}{\partial u^1} + u^1 \dfrac{\partial}{\partial u^2}$, $(u^1)^2 + (u^2)^2 = 1$, restricţia câmpului Y la $f(S^1)$.

Evident, $Y\Big|_{f(S^1)} \in \mathcal{X}(f(S^1))$

Deoarece aplicaţia $f : S^1 \to f(S^1)$ este difeomorfism, rezultă căaplicaţia $df : \mathcal{X}(S^1) \to \mathcal{X}(f(S^1))$ este izomorfism de algebre Lie. Prin urmare, există un unic câmp $E_1 \in \mathcal{X}(S^1)$ astfel încât $df(E_1) = Y\Big|_{f(S^1)}$. Rezultă $E_1 = df^{-1}(Y\Big|_{f(S^1)})$. Deoarece câmpul $Y\Big|_{f(S^1)}$ nu se anulează în nici un punct din S^1, rezultă că nici câmpul $E_1 \in \mathcal{X}(S^1)$ nu se anulează în nici un punct din S^1 şi deci câmpul $E_1 = df^{-1}(Y\Big|_{f(S^1)})$ paralelizează varietatea S^1.

(iv) Considerăm spaţiul vectorial $\mathbb{R}^4$. Vrem să construim o algebră (necomutativă). Presupunem că baza acestei algebre este constituită din simbolurile 1, i, j, k, adică pentru orice $q \in \mathbb{R}^4$ avem $q = u^1 \cdot 1 + u^2 \cdot i + u^3 \cdot j + u^4 \cdot k$. Cerem ca 1 să fie unitatea algebrei, deci $1^2 = 1$, $1 \cdot i = i \cdot 1 = i$, $1 \cdot j = j \cdot 1 = j$, $1 \cdot k = k \cdot 1 = k$.
Mai cerem ca
$i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k = -ji$, $jk = i = -kj$, $ki = j = -ik$.
Înmulţirea definită este necomutativă şi asociativă. Algebra astfel obţinută o notăm cu **H**. **H** se numeşte algebra cuaternionilor, iar elementele lui **H** se numesc cuaternioni.

Reamintim că grupul $(\mathbb{R}^4, +)$, cu înmulţirea definită mai sus, devine corp, notat **H** (corpul cuaternionilor). În cele ce urmează vom nota prin $\bar{q} = u^1 - u^2 \cdot i - u^3 \cdot j - u^4 \cdot k$ conjugatul cuaternionului q, iar prin $\|q\|$ vom nota modulul cuaternionului q, adică $\|q\|^2 = q\bar{q} = (u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 + (u^4)^2$.

Fie $p = (u^1, u^2, u^3, u^4) \in \mathbb{R}^4$. Notăm $q = u^1 + u^2 i + u^3 j + u^4 k$. Definim câmpurile $Y_1, Y_2, Y_3 \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^4)$ în felul următor:

Y_1 are componentele cuaternionului $qi = (-u^2, u^1, u^4, -u^3)$,

Y_2 are componentele cuaternionului $qj = (-u^3, -u^4, u^1, u^2)$,

Y_3 are componentele cuaternionului $qk = (-u^4, u^3, -u^2, u^1)$,

deci avem:

$$Y_1 = -u^2 \frac{\partial}{\partial u^1} + u^1 \frac{\partial}{\partial u^2} + u^4 \frac{\partial}{\partial u^3} - u^3 \frac{\partial}{\partial u^4},$$

$$Y_2 = -u^3 \frac{\partial}{\partial u^1} - u^4 \frac{\partial}{\partial u^2} + u^1 \frac{\partial}{\partial u^3} + u^2 \frac{\partial}{\partial u^4},$$

$$Y_3 = -u^4 \frac{\partial}{\partial u^1} + u^3 \frac{\partial}{\partial u^2} - u^2 \frac{\partial}{\partial u^3} + u^1 \frac{\partial}{\partial u^4}.$$

Este evident că în punctele sferei $S^3 = \{q \in \mathbf{H} \,/\, \|q\| = 1\}$ câmpurile Y_1, Y_2, Y_3 nu se anulează.

Fie $f : p \in S^3 \to f(p) = p \in \mathbb{R}^4$ aplicaţia incluziune şi fie $Y_i\big|_{f(S^3)} \in \mathcal{X}(f(S^3))$.

Deoarece aplicaţia $f : S^3 \to f(S^3)$ este difeomorfism, rezultă că $df : \mathcal{X}(S^3) \to \mathcal{X}(f(S^3))$ este izomorfism de algebre Lie. Prin urmare, există şi sunt unice câmpurile $E_1, E_2, E_3 \in \mathcal{X}(S^3)$ astfel încât

$$df(E_i) = Y_i\big|_{f(S^3)},\ i \in \{1, 2, 3\}.$$

Deoarece câmpurile Y_i ($i = \{1, 2, 3\}$) nu se anulează în nici un punct din $f(S^3)$ rezultă că nici câmpurile

$$E_i = df^{-1}\left(Y_i\big|_{f(S^3)}\right),\ i \in \{1, 2, 3\}$$

nu se anulează în nici un punct din S^3. Se observă uşor că componentele câmpurilor $df(E_i)$ verifică în fiecare punct condiţia (**). În plus, vectorii $df(E_i)(f(p))$ ($i \in \{1, 2, 3\}$) împreună cu vectorul q care indică vectorul de poziţie al unui punct oarecare din S^3, formează un sistem de vectori unitari şi ortogonali doi câte doi oricare ar fi $p = (u^1, u^2, u^3, u^4) \in S^3$, deoarece avem:

$$\langle df(E_i)(f(p)), df(E_i)(f(p))\rangle = \delta_{ij},\ (\forall)\, i \in \{1, 2, 3\},$$

$$\langle df(E_i)(f(p)), q\rangle = 0,\ (\forall)\, i \in \{1, 2, 3\}.$$

Rezultă că vectorii $df(E_i)(f(p))$ ($i \in \{1, 2, 3\}$) sunt liniar independenţi, oricare ar fi $p \in S^3$ şi deoarece aplicaţia $f^{-1} : f(S^3) \to S^3$ este difeomorfism, rezultă că câmpurile

$$E_i = df^{-1}\left(Y_i\big|_{f(S^3)}\right),\ i \in \{1, 2, 3\}$$

paralelizează varietatea S^3.

(v) Considerăm şapte câmpuri de vectori $Y_1, \ldots, Y_7 \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^8)$, care în baza canonică $\left\{\frac{\partial}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial u^8}\right\}$ a $\mathcal{F}(\mathbb{R}^8)$-modulului $\mathcal{X}(\mathbb{R}^8)$ au componentele:

$$Y_1 = (-u^2, u^1, u^4, -u^3, u^6, -u^5, -u^8, u^7),$$

$$Y_2 = (-u^3, -u^4, u^1, u^2, u^7, u^8, -u^5, -u^6),$$
$$Y_3 = (-u^4, u^3, -u^2, u^1, u^8, -u^7, u^6, -u^5),$$
$$Y_4 = (-u^5, -u^6, -u^7, -u^8, u^1, u^2, u^3, u^4),$$
$$Y_5 = (-u^6, u^5, -u^8, u^7, -u^2, u^1, -u^4, u^3),$$
$$Y_6 = (-u^7, u^8, u^5, -u^6, -u^3, u^4, u^1, -u^2),$$
$$Y_7 = (-u^8, -u^7, u^6, u^5, -u^4, -u^3, u^2, u^1),$$

Este uşor de văzut că în punctele sferei

$S^7 = \{(u^1, \ldots, u^8) \in \mathbb{R}^8 \,/\, \sum_{k=1}^{8} (u^k)^2 = 1\}$ câmpurile $Y_1, \ldots, Y_7$ nu se anulează.

Fie $f : p \in S^7 \to f(p) = p \in \mathbb{R}^8$ aplicaţia incluziune. Deoarece aplicaţia $df : \mathcal{X}(S^7) \to \mathcal{X}(f(S^7))$ izomorfism de algebre Lie, rezultă că există şi sunt unice câmpurile $E_i \in \mathcal{X}(S^7)$ $(i = 1, \ldots, 7)$ astfel încât:

$$df(E_i) = Y_i \Big|_{f(S^7)}, \; i \in \{1, \ldots, 7\}.$$

Este uşor de văzut că componentele câmpurilor $df(E_i)$, $i \in \{1, \ldots, 7\}$ verifică condiţia (**). În plus, vectorii $df(E_i)(f(p))$, $i \in \{1, \ldots, 7\}$ formează un sistem de vectori unitari şi ortogonali doi câte doi în orice punct al sferei S^7. Rezultă că câmpurile $df(E_i)$, $i \in \{1, \ldots, 7\}$ sun independente şi deoarece $f^{-1} : f(S^7) \to S^7$ este difeomorfism, rezultă că câmpurile

$$E_i = df^{-1}(Y_i), \; i \in \{1, \ldots, 7\} \text{ paralelizează varietatea } S^7.$$

Q.E.D.

2.2. Fie $E_1 \in \mathcal{X}(S^1)$ un câmp ce paralelizează cercul S^1. Considerăm pe S^1 conexiunea liniară ∇^- definită prin $\nabla^-_{E_1} E_1 = 0$. Pe S^1 considerăm atlasul $\mathcal{A} = \{(U_N, h_N), U_S, h_S)\}$. Notăm cu x^1 funcţia coordonată asociată hărţii (U_N, h_N).

(i) Vom exprima câmpul $E_1 \Big|_{U_N}$ în baza $\left\{\frac{d}{dx^1}\right\}$,

(ii) Vom exprima câmpul $\dfrac{d}{dx^1}$ în funcţie de $E_1\Big|_{U_N}$,

(iii) Vom determina componentele conexiunii ∇^- în raport cu harta (U_N, h_N),

Demonstraţie. Am văzut mai sus că $E_1 = df^{-1}(Y\Big|_{f(S^1)})$, unde $f: S^1 \to \mathbb{R}^2$ este aplicaţia incluziune, iar câmpul $Y \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^2)$ este definit prin $Y = -u^2\dfrac{\partial}{\partial u^1} + u^1\dfrac{\partial}{\partial u^2}$.

În continuare, restricţia câmpului E_1 la U_N o vom nota tot cu E_1. Componenta $E_1(x^1)$ a câmpului E_1 în baza $\left\{\dfrac{d}{dx^1}\right\}$ este:

$$E_1(x^1) = df^{-1}(Y\Big|_{f(S^1)})(x^1) = Y\Big|_{f(S^1)}(x^1 \circ f^{-1}) \circ f$$

Ţinând seama de formula $x^1 = \dfrac{u^1}{u^1 - u^2}$, rezultă:

$$E_1(x^1) = (-u^2\frac{\partial}{\partial u^1} + u^1\frac{\partial}{\partial u^2})(\frac{u^1}{u^1-u^2}) = -\frac{u^2}{1-u^2} + \frac{(u^1)^2}{(1\text{-}u^2)^2} =$$

$$= \frac{(x^1)^2-1}{(x^1)^2+1}\left[1 - \frac{(x^1)^2-1}{(x^1)^2+1}\right]^{-1} + (x^1)^2 = \frac{1}{2}[(x^1)^2+1].$$

Prin urmare, în harta (U_N, h_N), câmpul $E_1 \in \mathcal{X}(S^1)$ se scrie:

$$E_1 = \frac{1}{2}[(x^1)^2+1]\frac{d}{dx^1}.$$

(ii) Avem $\dfrac{d}{dx^1} = \dfrac{2}{(x^1)^2+1}E_1$.

(iii) Avem
$$\nabla^-_{\frac{d}{dx^1}}\frac{d}{dx^1} = \nabla^-_{\frac{2}{(x^1)^2+1}E_1}\frac{2}{(x^1)^2+1}E_1$$

$$= \frac{4}{(x^1)^2+1}\nabla^-_{E_1}E_1 + \frac{2}{(x^1)^2+1}E_1(\frac{2}{(x^1)^2+1}E_1)E_1 =$$

$$= \frac{2}{(x^1)^2+1}\frac{(x^1)^2+1}{2}\frac{d}{dx^1}(\frac{2}{(x^1)^2+1})\frac{1}{2}[(x^1)^2+1]\frac{d}{dx^1} =$$

$$= \frac{\text{-}4x^1}{((x^1)^2+1)^2}\frac{1}{2}((x^1)^2+1)\frac{d}{dx^1} = \frac{\text{-}2x^1}{(x^1)^2+1}\frac{d}{dx^1}.$$

Dacă notăm cu Γ^1_{11} componenta conexiunii ∇^- în harta (U_N, h_N), deci

$$\nabla^{-}_{\frac{d}{dx^1}} \frac{d}{dx^1} = -\Gamma^1_{11} \frac{d}{dx^1}$$, atunci avem:

$$\Gamma^1_{11} = \frac{2x^1}{(x^1)^2 + 1}$$

Q.E.D.

2.3. Propoziţie. Fie E_1, E_2, E_3 câmpurile ca paralelizează varietatea S^3. Atunci aceste câmpuri generează liniar o subalgebră Lie $L \subset \mathcal{X}(S^3)$ de dimensiune trei.

Demonstraţie. Am văzut mai sus că o bază a $\mathcal{F}(S^3)$-modulului $\mathcal{X}(S^3)$ este constituită din câmpurile

$$E_i = df^{-1}\left(Y_i \big|_{f(S^3)} \right), \; i \in \{1, 2, 3\},$$

unde $f : S^3 \to \in \mathbb{R}^4$ este aplicaţia incluziune, iar câmpurile $Y_i \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^4)$ sunt definite prin:

$$Y_1 = -u^2 \frac{\partial}{\partial u^1} + u^1 \frac{\partial}{\partial u^2} + u^4 \frac{\partial}{\partial u^3} - u^3 \frac{\partial}{\partial u^4},$$

$$Y_2 = -u^3 \frac{\partial}{\partial u^1} - u^4 \frac{\partial}{\partial u^2} + u^1 \frac{\partial}{\partial u^3} + u^2 \frac{\partial}{\partial u^4},$$

$$Y_3 = -u^4 \frac{\partial}{\partial u^1} + u^3 \frac{\partial}{\partial u^2} - u^2 \frac{\partial}{\partial u^3} + u^1 \frac{\partial}{\partial u^4}.$$

Deoarece aplicaţia $f^{-1} : f(S^3) \to S^3$ este difeomorfism, rezultă

$$[E_i, E_j] = \left[df^{-1}\left(Y_i \big|_{f(S^3)} \right), df^{-1}\left(Y_j \big|_{f(S^3)} \right) \right] = df^{-1}\left(\left[Y_i \big|_{f(S^3)}, Y_j \big|_{f(S^3)} \right] \right).$$

Avem:

$$[E_1, E_2] = \left[df^{-1}\left(Y_1 \big|_{f(S^3)} \right), df^{-1}\left(Y_2 \big|_{f(S^3)} \right) \right] =$$

$$= df^{-1}\left(-2u^4 \frac{\partial}{\partial u^1} + 2u^3 \frac{\partial}{\partial u^2} - 2u^2 \frac{\partial}{\partial u^3} + u^1 \frac{\partial}{\partial u^4} \right) = 2\, df^{-1}\left(Y_3 \big|_{f(S^3)} \right) = 2E_3,$$

$$[E_2, E_3] = \left[df^{-1}\left(Y_2 \big|_{f(S^3)} \right), df^{-1}\left(Y_3 \big|_{f(S^3)} \right) \right] =$$

$$= df^{-1}\left(-2u^2 \frac{\partial}{\partial u^1} + 2u^1 \frac{\partial}{\partial u^2} + 2u^4 \frac{\partial}{\partial u^3} - 2u^3 \frac{\partial}{\partial u^4} \right) = 2\, df^{-1}\left(Y_1 \big|_{f(S^3)} \right) = 2E_1,$$

$$[E_3, E_1] = \left[df^{-1}\left(Y_3 \big|_{f(S^3)} \right), df^{-1}\left(Y_1 \big|_{f(S^3)} \right) \right] =$$

$$= df^{-1}\left(-2u^3\frac{\partial}{\partial u^1} - 2u^4\frac{\partial}{\partial u^2} + 2u^1\frac{\partial}{\partial u^3} + 2u^2\frac{\partial}{\partial u^4}\right) = 2\,df^{-1}\left(Y_2\Big|_{f(S^3)}\right) = 2\,E_2 .$$

Deci, câmpurile E_1, E_2, E_3 generează liniar o subalgebră Lie
$L = \{ c^1E_1 + c^2E_2 + c^3E_3 \,/\, c^1, c^2, c^3 \in \mathbb{R} \}$.

Deoarece E_1, E_2, E_3 sunt liniar independente, rezultă că dim L = 3.

Q.E.D.

BIBLIOGRAFIE

[1] **Hirica, I.,** *Geometrie Diferenţială. Probleme. Aplicaţii*. Editura Fundaţiei „România de Mâine”, Bucureşti, 1999.

[2] **Pripoae, G.,** *Culegere de probleme de Grupuri Lie*. ibid, 1987.

[3] **Pripoae, G.,** *Teoreme şi probleme de Grupuri Lie*. ibid, 1996.

[4] **Pripoae, G.,** *Culegere de probleme de geometrie diferenţială*. ibid, 1987.

[5] **Nicolescu. L,** *Capitole speciale de geometrie diferenţială,* Tip. Univ. din Bucureşti, Bucureşti, 1981.

[5] **Nicolescu. L,** *Lecţii de Grupuri Lie,* Tip. Univ. din Bucureşti, Bucureşti, 1984.